第 3 章 習題簡答

習題 3-1

1. 臨界點：$0,\dfrac{3}{4}$，極大值：$f(-2)=24$，極小值：$f\left(\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{27}{256}$
2. 臨界點：$0,\pm 2$，極大值：$f(\pm 3)=5$，極小值：$f(\pm 2)=0$
3. 臨界點：$0,1$，極大值：$f(2)=f(0)=2$，極小值：$f(\pm 1)=1$
4. 臨界點：2，極大值：$f(2)=4$，極小值：$f(0)=2$
5. $\dfrac{1}{4}$ 6. c 點不存在 7. $\sqrt{3}$ 8. 略 9. 略 10 略

習題 3-2

1. 遞增區間：$(-1,0)\cup(1,\infty)$，遞減區間：$(-\infty,-1)\cup(0,1)$，相對極大值：$f(0)=0$，相對極小值：$f(\pm 1)=-1$。
2. 遞增區間：$(-3,-1)\cup(1,\infty)$，遞減區間：$(-\infty,-3)\cup(-1,1)$，相對極大值：$f(-1)=4$，相對極小值：$f(-3)=0, f(1)=0$。
3. 遞增區間：$(0,4)$，遞減區間：$(-5,0)\cup(4,5)$，相對極大值：$f(4)=16/3$，相對極小值：$f(0)=0$，極大值：$f(-5)=275/6$，極小值：$f(0)=0$。
4. 遞增區間：$(-\infty,-1-\sqrt{6})\cup(-1+\sqrt{6},\infty)$，遞減區間：$(-1-\sqrt{6},-1)\cup(-1,-1+\sqrt{6})$，相對極大值：$f(-1-\sqrt{6})=-3-2\sqrt{6}$，相對極小值：$f(-1+\sqrt{6})=-3+2\sqrt{6}$。
5. 遞增區間：$(0,\infty)$，遞減區間：$(-\infty,0)$，無極值。
6. 遞增區間：$(-\infty,-3)\cup(-3,0)$，遞減區間：$(0,3)\cup(3,\infty)$，相對極大值：$f(0)=4/9$，無相對極小值。
7. 略 8. 略 9. 略 10. 相對極小值：$f(1/e)=1/\sqrt[e]{e}$。

習題 3-3

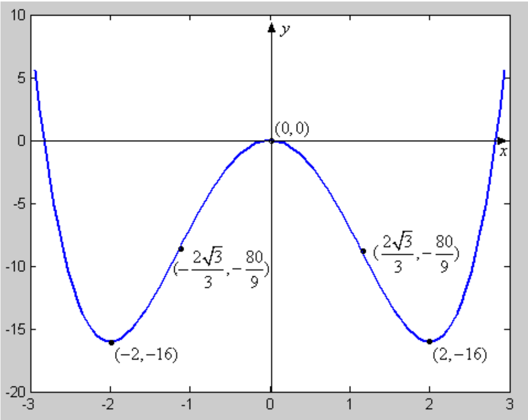
1. 相對極大值：$f(0)=2$，相對極小值：$f(2)=-2$，反曲點：$(1,0)$。
2. 相對極大值：$f(0)=0$，相對極小值：$f(\pm 1)=-1$，反曲點：$(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{5}{9})$。
3. 相對極大值：$f(-1)=2$，相對極小值：$f(1)=-2$，反曲點：$(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{7}{4\sqrt{2}}),(0,0)$。
4. 相對極大值：$f(0)=\sqrt[3]{16}$，相對極小值：$f(\pm 2)=0$，反曲點：$(\pm 2\sqrt{3},\sqrt[3]{4})$。
5. 相對極大值：$f(0)=0$，相對極小值：$f\left(\dfrac{2}{5}\right)=-\dfrac{3}{25}\sqrt[3]{20}$，反曲點：$(-\dfrac{1}{5},-\dfrac{6}{25}\sqrt[3]{5})$
6. 上凹區間：$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$，下凹區間：$(-1,1)$，反曲點：$(\pm 1,-5)$。
7. 上凹區間：$(-\infty,-1)\cup(-\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}})\cup(1,\infty)$，下凹區間：$(-1,-\dfrac{1}{\sqrt{5}})\cup(\dfrac{1}{\sqrt{5}},1)$，

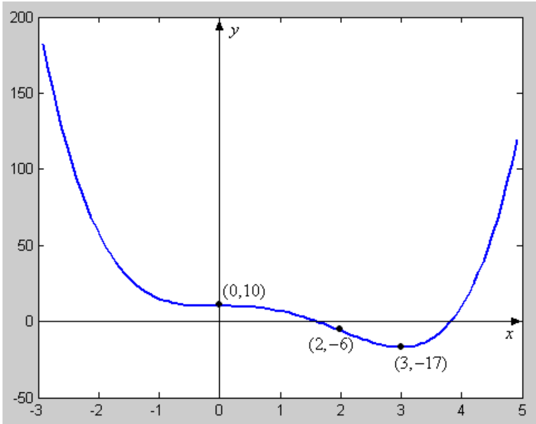
   反曲點：$(\pm 1,0),(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}},-\dfrac{64}{125})$。
8. 上凹區間：$(-2,\infty)$，下凹區間：$(-\infty,-2)$，反曲點：$(-2,-2e^{-2})$。
9. 上凹區間：$(2,\infty)$，下凹區間：$(-\infty,2)$，反曲點：$(2,2e^{-2})$。

習題 3-4

1. 相對極大點：$(0,0)$，
相對極小點：$(-2,-16),(2,-16)$，
反曲點：$(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{80}{9})$

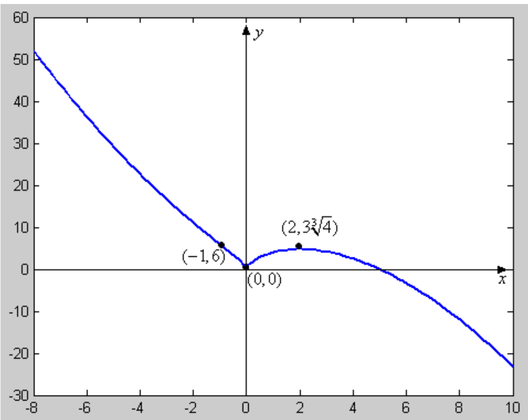
2. 相對極小點：$(3,-17)$，
反曲點：$(0,10),(2,-6)$

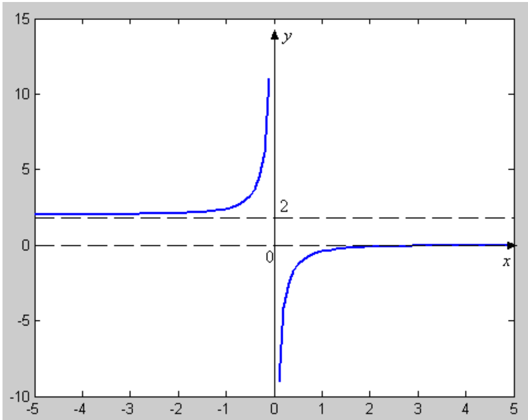




3. 相對極大點：$(2,3\sqrt[3]{4})$，
相對極小點：$(0,0)$，
反曲點：$(-1,6)$

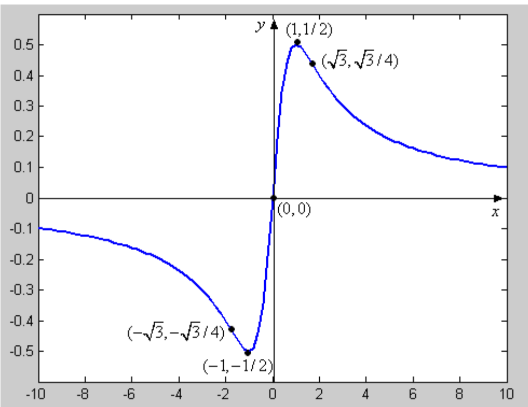
4. 無極值點及反曲點。

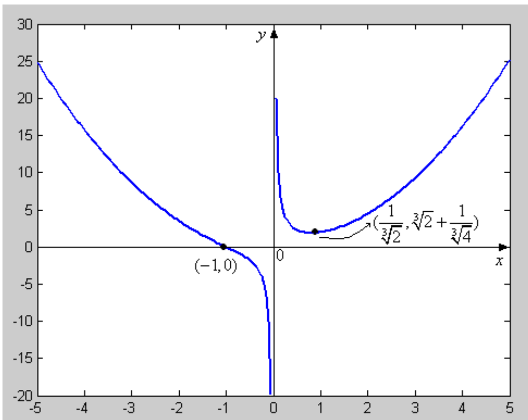




5. 相對極大點：$(1,1/2)$，
相對極小點：$(-1,-1/2)$，反曲點
：$(-\sqrt{3},-\sqrt{3}/4),(0,0),(\sqrt{3},\sqrt{3}/4)$

6. 相對極小點：$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}})$，
反曲點：$(-1,0)$



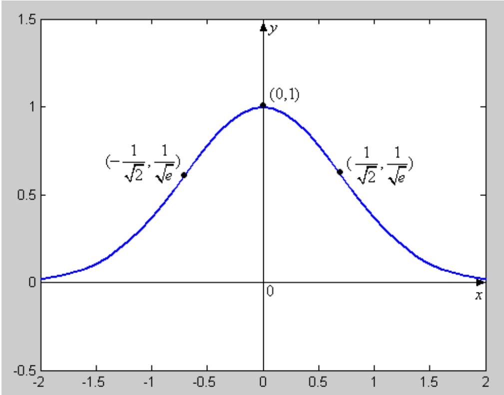


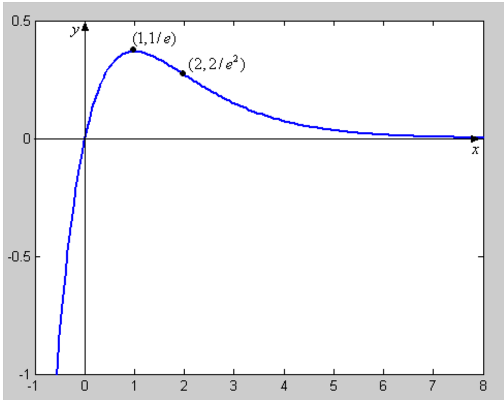
7. 相對極大點：$(0,1)$，

反曲點：$(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}})$

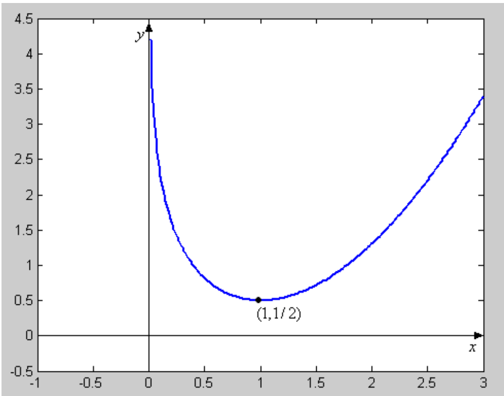
8. 相對極大點：$(1,1/e)$，

反曲點：$(2,2/e^2)$





9. 相對極小點：$(1,1/2)$



10. 略

習題 3-5

1.　42 呎/秒　2.　$-\frac{3}{10}$ 安培/歐姆　3.　25 ^{o}C/分

4. 加速度為 12 公尺/秒^2，速度為 4 公尺/秒　5. 略

6. 頂端以 $\frac{13}{8}$ 公尺/分之速度下降　7.　$6\sqrt{5}$ 公尺/秒　8. $\frac{1}{2\pi}$ 公尺/分

9. (1) $\frac{dA}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}$　(2) $3\pi\ \text{cm}^2/\text{sec}$

10. (1) $\frac{dV}{dt}=\pi(2rh\frac{dr}{dt}+r^2\frac{dh}{dt})$　(2)　$-20\pi\ \text{cm}^3/\text{sec}$，體積在減少中。

習題 3-6

1. 當消費人工 25 個單位與材料 50 個單位時，可使生產量達到最大。 2.　10

3. $\bar{C}'(x)=3-\frac{120}{x^3}-\frac{1}{x^2}$　4.　5　5.　4　6. (1) $-4x+24$　(2) 4　(3) 利潤函數：$-2x^2+20x-14$，邊際利潤函數：$-4x+20$　(4) 當生產與銷售為 5 個單位時，總利潤可達最大，此時銷售價格為 $p=24-2(5)=14$　(5) 當生產與銷售為 4 個單位

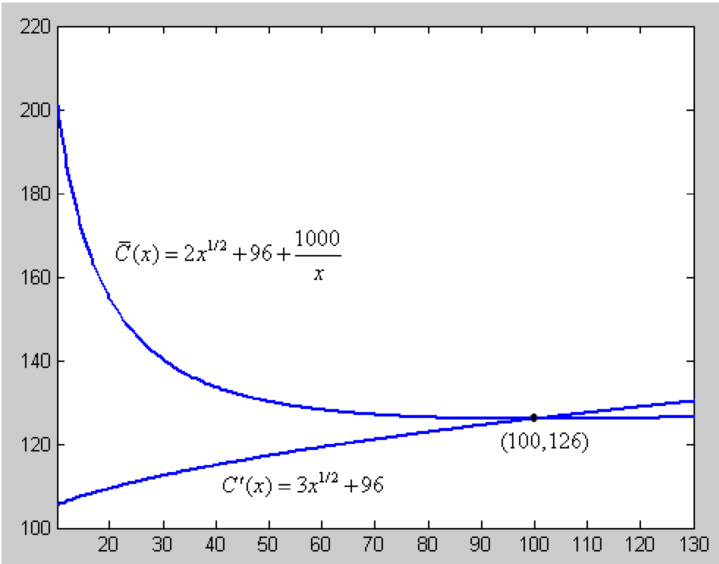
時，總利潤可達最大，此時銷售價格為 $p = 24 - 2(4) = 16$ 。

7. 當生產水準為 $\dfrac{14+\sqrt{151}}{3}$ 單位時，可使利潤達到最大。

8. 當生產水準為 $\ln 3$ 單位時，可使利潤達到最大。

9. 當生產 100 個單位時，總利潤可達最大。

10. (1)當生產水準為 100 時，每單位之平均成本為最小 (2)當生產水準為 100 時，每單位之平均成本等於邊際成本 (3)



11. 當生產水準為 100 時，將會使平均成本為最小，且最小之平均成本為 230。

12. 當生產水準為 10 時，將會使平均成本為最小，且最小之平均成本為 246。

13. 略 14. $\dfrac{p}{90-p}$

15. 當 $E_C < 1$ 時(即 $0 < x < 100$)， $\dfrac{d\bar{C}(x)}{dx} < 0$ ，則 x 增加時，平均成本 $\bar{C}(x)$ 減少。

當 $E_C = 1$ 時(即 $x = 100$)， $\dfrac{d\bar{C}(x)}{dx} = 0$ 。因而 $\bar{C}(100) = 126$ 為最小平均成本。

當 $E_C > 1$ 時(即 $100 \le x$)， $\dfrac{d\bar{C}(x)}{dx} > 0$ ，則 x 增加時，平均成本 $\bar{C}(x)$ 亦增加。

16. $E_R = 2 - \dfrac{3000}{x}$

(1) 當 $x > 1500$ ，則 $p < 45$ ， $E_R > 0 \Rightarrow E_p < 1, \dfrac{dR}{dp} > 0$

所以，當 $p < 45$ 時，總收益遞增，需求不富彈性。

(2) 當 $x < 1500$ ，則 $p > 45$ ， $E_R < 0 \Rightarrow E_p > 1, \dfrac{dR}{dp} < 0$

所以，當 $p > 45$ 時，總收益遞減，需求富彈性。

習題 3-7

1. 5,5　2. 8,8　3. 當 $x=a/\sqrt{2}$ 時有最大面積 $2ab$。

4. 設圓柱形的底半徑為 r，高為 h，則當 $r=h$ 時最經濟。

5. 最大容積為 450 cm^3　6. $(1,\pm 1)$　7. 底圓半徑為 $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}a$

8. 圓柱底半徑為 $\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$ cm，高為 $2\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$ cm。

習題 3-8

1. $\Delta y \approx 1.0$　2. $dy=3(2x^3+4x^2-5)^2(6x^2+8x)dx$　3. $dy=\dfrac{2(u^4-1)(3u^4+1)}{u^3}du$

4. $dy=(3t^2-\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}})dt$　5. $du=\dfrac{1}{x}dx$　6. 0.051　7. 0.111934　8. 0.50151　9. 0.1

10. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$　11. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-3x^2y^2-2y^3}{2x^3y+6xy^2+4y^3}$　12. 10π cm^3　13. 9.72 cm^3

習題 3-9

1. 1　2. 9　3. ∞　4. 1　5. $-\infty$　6. e^2　7. 1　8. 1　9. 1/2　10. 1/2　11. e^2　12. 5
13. $e^{1/2}$　14. 1/2　15. e^a　16. 1/6　17. 0　18. e^{ab}

習題 3-10

1. -1.2339

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	−1.00000	1.00000	3.00000	−1.33333
1	−1.33333	−0.62963	7.00000	−1.24338
2	−1.24338	−0.05518	5.78928	−1.23386
3	−1.23386	−0.00058		

2. 1.2838

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	1.00000	−2.00000	5.00000	1.40000
1	1.40000	1.24160	11.97600	1.29633
2	1.29633	0.12027	9.71370	1.28394
3	1.28394	0.00154	9.46639	1.28378
4	1.28378	0.00000		

3. 1.14642

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	1.00000	−0.28172	1.71828	1.16395
1	1.16395	0.03862	2.20257	1.14642
2	1.14642	0.00049		

4. 2.9884

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	3.00000	0.01001	0.85888	2.98835
1	2.98835	0.00007		

5. 2.2361 6. 1.1225 7. 0.9933 8. 1.7455