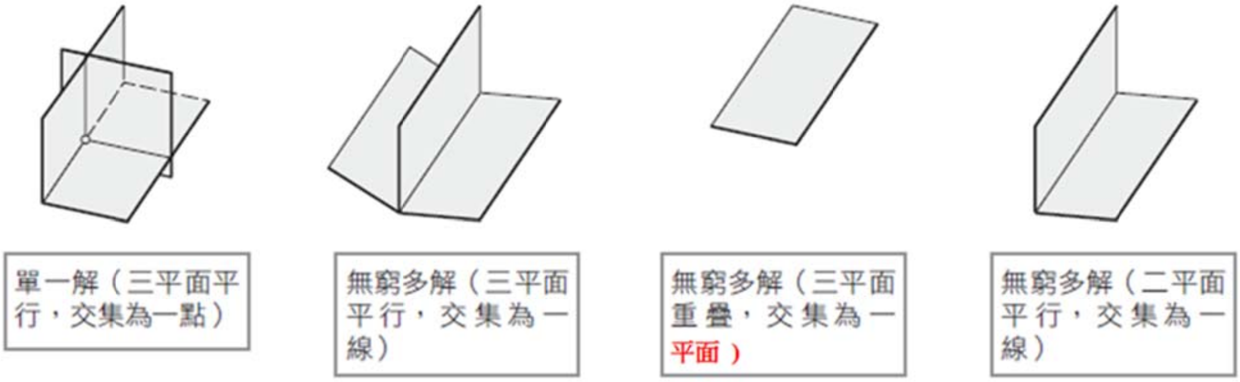
勘誤表

Chapter 1 線性方程系統與矩陣

pp.5



➲ 圖 1.1.2

pp.21

一些列梯形的影響因素

pp.36

$$[AD]_{ij} \equiv \sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[D]_{kj} \equiv \sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}\left[\sum_{l=1}^{n}[B]_{kl}[C]_{lj}\right] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}[A]_{ik}[B]_{kl}[C]_{lj}$$
$$= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[B]_{kl}\right)[C]_{lj} \equiv \sum_{l=1}^{n}[E]_{il}[C]_{lj} \equiv [EC]_{ij}$$

pp.42

(b) 矩陣是不可逆的，因為 det(A)=(-1)(-6)-(2)(3)=0

pp.43

$A^0 \equiv I$ 與 $A^n = AA\cdots A$ [n 個因子]

pp.69

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -12 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chapter 2 行列式值

pp.88

$$x = \frac{1}{ad-bc}(hd-kb) \quad 和 \quad y = \frac{1}{ad-bc}(ka-hc)\ （當\ ad-bc \neq 0\ 時）$$

Chapter 3 尤拉向量空間

pp.132

(a)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| + \|\mathbf{v}\|^2 && \longleftarrow \text{絕對值的特性} \\
&\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 && \longleftarrow \text{柯西史瓦茲不等式} \\
&= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2
\end{aligned}$$

因為不等式兩邊均非負值，所以 開 根號後，得證。

pp.139

定理 3.3.2　投影定理

若 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{a}$ 為 R^n 中之向量，且 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$，則 $\mathbf{u}$ 可唯一表為 $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$，其中， $\mathbf{w}_1$ 為 $\mathbf{a}$ 的純量倍數之向量， $\mathbf{w}_2$ 為正交於 $\mathbf{a}$ 之向量。

Chapter 4 一般化向量空間

pp.151

- 公理 7— $k(u+v) = (uv)^k = u^k v^k = (ku) + (kv)$ ◀

pp.155

▶表 1

R^2 的子空間	R^3 的子空間
•$\{\mathbf{0}\}$ •通過原點的直線 •R^2	•$\{\mathbf{0}\}$ •通過原點的直線 •包含原點的平面 •R^3

pp.162

所以， W 具加法封閉性。同樣地，若 k 為任意純量，則

$$A(k\mathbf{x}_1) = kA\mathbf{x}_1 = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

所以， W 具乘法封閉性。 ◀

純量

pp.166

投影片有誤！範例 3 內容

pp.176

成

只有顯解。在證明可生 R^3 的部分，需證明 R^3 中的任意向量 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 都可被表示為

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b} \tag{2}$$

pp.180

定義 2

若 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 為向量空間 V 的有序基底，且

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

為以 S 中的基底向量來表示，則純量 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 稱為 $\mathbf{v}$ 相對於基底 S 的**座標**（coordinates）。而 R^n 中的向量 $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ 稱為 $\mathbf{v}$ 相對於基底 S 的**座標向量**（coordinate vector），且記作

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \tag{6}$$

pp.186

定理 4.5.5 令 S 為有限維度向量空間 V 中的一有限集合

pp.187

若 S = {$v_1, v_2, \ldots, v_n$}為有限維度向量空間 V 的一組有序基底，且若

pp.192

一個計算 $P_{B\to B'}$ 的程序

步驟 1、形成矩陣 $[B' \mid B]$。

步驟 2、執行基本列運算將步驟 1 的矩陣變成簡化列梯形。

步驟 3、所得的矩陣將是 $[I \mid P_{B\to B'}]$。

步驟 4、從步驟 3 的右側矩陣提取矩陣的 $P_{B\to B'}$。

此程序可用底下示意圖檢視

$$[\,新基底 \mid 舊基底\,] \xrightarrow{列運算} [\,I \mid 舊到新的轉移\,] \tag{14}$$

解說範例：

新基底： $B = \{(-3, 2), (4, 2)\}$ ，舊基底： $B' = \{(-1, 2), (2, -2)\}$

若，舊座標向量為 $[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ ，試求新座標向量 $[\mathbf{v}]_B = ?$

轉移矩陣：舊基底向量改以新基底表示

$(-1, 2) = c_1(-3, 2) + c_2(4, -2)$

$(2,-2)=d_1(-3,2)+d_2(4,-2)$
可得兩組線性系統：

$$\begin{cases}-3c_1+4c_2=-1\\ 2c_1-2c_2=2\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}-3&4&-1\\2&-2&2\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&0&3\\0&1&2\end{array}\right]\text{和}\begin{cases}-3d_1+4d_2=2\\ 2d_1-2d_2=-2\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}-3&4&2\\2&-2&-2\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-2\\0&1&-1\end{array}\right]$$

一起做：$\left[\begin{array}{cc|cc}-3&4&-1&2\\2&-2&2&-2\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-2\\0&1&2&-1\end{array}\right]$

（左新右舊：$[\text{新基底向量}|\text{舊基底向量}]\underset{\text{高斯喬登消去法}}{\Rightarrow}[I_n|\text{轉移矩陣}]$）

範例：
舊基底 $S=\{1,x,x^2,x^3\}$，新基底 $B=\{1,1+x,1+x^2,x^3\}$

若 $\mathbf{p}=p(x)=3x^3-2x^2+4$，則 $(\mathbf{p})_S=$? $(\mathbf{p})_B=$?

解：$(\mathbf{p})_S=\begin{bmatrix}4\\0\\-2\\3\end{bmatrix}$

轉移矩陣求解：$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-1&-1&-1\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$

$$(\mathbf{p})_B=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\\-2\\3\end{bmatrix}$$

驗證：$3x^3-2x^2+4=3(1)+0(1+x)-2(1+x^2)+3(1+x^3)$

pp.196

定理 4.7.2
若 $\mathbf{x}_0$ 為具一致性的線性系統 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的任一解，且 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_k\}$ 為 A 的核空間基底
則 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的通解可表為以下形式

pp.197

比較以下兩線性系統

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

pp.200

投影片有誤！範例 6 以列簡化方式求列空間之基底

pp.201

投影片有誤！範例 7 使用列簡化求行空間基底

pp.208

定理 4.8.3

若 A 為 $m \times n$ 矩陣，則

(a) rank(A)即 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的通解中前導變數的個數。

(b) nullity(A) 即 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的通解中參數（自由變數）的個數。

pp.218

51.題

在 P^2 中

Chapter 5 內積空間

pp.228

在代數上來說，此種內積可被視為 R^{n+1} 中$(n+1)$元組

$$(p(x_0), p(x_1), \ldots, p(x_n)) \quad \text{和} \quad (q(x_0), q(x_1), \ldots, q(x_n))$$

Chapter 6 特徵值、特徵向量與矩陣對角化

pp.265

譯者註 1：若 A 矩陣內的元素的 $(A)_{ij} = a_{ij}$，則 (1) 式的形式為 $\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$ =0。

pp.271

再將 $\lambda = 2$ 帶回 $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$，將係數矩陣以高斯 – 喬登消去法化簡後得

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pp.272

解

矩陣 A 的特徵方程式如下

$$|A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

因此，可直接對第一列做餘因子展開以求得行列式值為

$$(1-\lambda)[(9-\lambda)(2-\lambda) - 8] = (1-\lambda)(\lambda-10)(\lambda-1) = 0$$

所以，特徵值為

$$\lambda = 10 \qquad \text{或 } \lambda = 1\text{（二重根）}$$

pp.276

注意：若 B 相似於 A，則 A 也相似於 B，因為可令可逆矩陣 $Q=P^{-1}$，使得 $A= Q^{-1}BQ$。因此，我們通常稱 A 和 B 為相似矩陣(similar matrices)。

pp.277

定理 6.2.1

若 A 為 $n \times n$ 矩陣，則下列敘述為等效。

(a) A 為可對角化。

(b) A 有 n 個線性獨立的特徵向量

pp.279

可對角化 A 矩陣，亦做以下確認

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

pp.284

$(\lambda I - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 和 $(\lambda I - J)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

pp.288

範例 5　二維空間中的座標軸旋轉

使用 R^2 的旋轉方程式 (4) 式，若直角座標系旋轉 $\theta = \pi/4$ 後，求點**Q(2, -1)**的新座標值。

解

因為

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(4) 式變為

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

因此，**Q(2, -1)** 的新座標向量為

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

即**Q(2, -1)**的新座標值為 $(x', y') = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$。◀

pp.293

$$P^T AP = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Chapter 7 線性轉換

pp. 305

備註

定義 1 的三種分類並無法詳盡闡述所有的可能；例如，尚有二次式 $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$ 且 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$，稱為**正半定**（positive semidefinite）、$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0$ 且 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$，稱為 負半定（negative semidefinite）。每一正定形式都為正半定，但其逆不真。每一負定形式都為負半定，但

pp. 347

由微分的特性，可知

$$D(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = D(\mathbf{f}) + D(\mathbf{g}) \qquad \text{且} \quad D(k\mathbf{f}) = k\,D(\mathbf{g})$$

因此，微分算子 D 為線性轉換。

pp.A3

56.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ (c) $P_{B_2\to B_1}P_{B_1\to B_2} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $(w)_{B_1} = \begin{bmatrix} -21 \\ 13 \end{bmatrix}$, $(w)_{B_2} = \begin{bmatrix} 23 \\ -18 \end{bmatrix}$ (e) $(w)_{B_2} = \begin{bmatrix} 17 \\ -14 \end{bmatrix}$, $(w)_{B_1} = \begin{bmatrix} -19 \\ 11 \end{bmatrix}$

詳解：

(a) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$, $P_{B_2\to B_1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$, $P_{B_1\to B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $P_{B_2\to B_1}P_{B_1\to B_2} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$P_{B_1\to B_2}P_{B_2\to B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$, $P_{S\to B_1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$(w)_{B_1} = P_{S\to B_1}(w)_S = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$(w)_{B_2} = P_{B_1\to B_2}(w)_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -21 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ -18 \end{bmatrix}$$

(e) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$, $P_{S\to B_2} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$(w)_{B_2} = P_{S\to B_2}(w)_S = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$(w)_{B_1} = P_{B_2\to B_1}(w)_{B_2} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 17 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ 11 \end{bmatrix}$$