2. 將以下問題轉換為可處理的線性規劃模式，且僅能增加一個變數：

$$\text{極大化} \quad Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

受限於

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &\le 1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 &\le 8 \\ 3x_1 - x_2 - 7x_3 &\ge 5 \\ x_1, x_2, x_3 & \text{不受限} \end{aligned}$$

Sol. 讓

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' - x_4 \\ x_2 &= x_2' - x_4 \\ x_3 &= x_3' - x_4 \\ x_1', x_2', x_3', x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

代入原問題可得

$$\text{極大化} \quad Z = 3x_1' + 5x_2' + 2x_3' - 10x_4$$

受限於

$$\begin{aligned} x_1' - x_2' - x_3' + x_4 &\le 1 \\ x_1' + 2x_2' - 5x_3' + 2x_4 &\le 8 \\ 3x_1' - x_2' - 7x_3' + 5x_4 &\ge 5 \\ x_1', x_2', x_3', x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

3. 考慮以下問題：

$$\text{極大化} \quad Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{受限於}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(a) 列出此問題的所有基解。

(b) 指出(a)的各基解是可行的（即 BFS）或是不可行的。

(c) 由(b)決定此問題的最佳解。

Sol. (a) 如表 3.1 所示，此問題有 6 個基解（BS）。

表 3.1

#	NBV	BS	BFS	Z
1	x_1, x_2	$\overline{\mathbf{x}} = (0,0,8,6)$	Yes	0
2	x_1, x_3	$\overline{\mathbf{x}} = (0,8,0,-2)$	No	16
3	x_1, x_4	$\overline{\mathbf{x}} = (0,6,2,0)$	Yes	12
4	x_2, x_3	$\overline{\mathbf{x}} = (4,0,0,2)$	Yes	12
5	x_2, x_4	$\overline{\mathbf{x}} = (6,0,-4,0)$	No	18
6	x_3, x_4	$\overline{\mathbf{x}} = (2,4,0,0)$	Yes	14

(b) 如表中所示，#1, #3, #4, #6 四個 BS 是可行基解（BFS），#2 及#5 不是可行的。

(c) 在四個 BFS 中，Z 值最大者即爲最佳解，因此最佳解是#6，即 $\overline{\mathbf{x}} = (2,4,0,0), Z = 14$ 。

4. 考慮以下問題：

$$
\begin{aligned}
&\text{極大化} \quad Z = 10x_1 + 15x_2 \\
&\text{受限於} \\
&\qquad 4x_1 + 8x_2 \le 32 \\
&\qquad 7x_1 + 6x_2 = 42 \\
&\qquad x_1 - 2x_2 \ge 2 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

(a) 列出此問題的所有基解。

(b) 指出(a)的各基解是可行的（即 BFS）或是不可行的。

(c) 由(b)決定此問題的最佳解。

Sol. (a) 如表 3.2 所示，此問題有 4 個基解（BS）。

表 3.2

#	NBV	BS	BFS	Z
1	x_1	$\bar{\mathbf{x}} = (0, 7, -24, -16)$	No	105
2	x_2	$\bar{\mathbf{x}} = (6, 0, 8, 6)$	Yes	60
3	x_3	$\bar{\mathbf{x}} = (9/2, 21/12, 0, -1)$	No	71.25
4	x_4	$\bar{\mathbf{x}} = (24/5, 7/5, 8/5, 0)$	Yes	69

(b) 如表中所示，#2 與#4 是可行基解（BFS），#1 與#3 不是可行的。

(c) 在兩個 BFS 中，Z 值最大者即爲最佳解，因此最佳解是#4，即 $\bar{\mathbf{x}} = (24/5, 7/5, 8/5, 0), Z = 69$ 。

6. 考慮以下問題：

$$\begin{aligned} &\text{極大化} \quad Z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ &\text{受限於} \\ &\qquad 3x_1 + 2x_2 \le 24 \\ &\qquad x_1 + x_2 + x_3 \le 8 \\ &\qquad 2x_1 + x_3 \le 10 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

(a) 列出此問題的所有基解。

(b) 指出(a)的各基解是可行的（即 BFS）或是不可行的。

(c) 由(b)決定此問題的最佳解。

Sol. (a) 如表 3.3 所示，此問題有 18 個基解（BS）。在求基解的過程中，僅#20 需要求解三個方程式的聯立方程式，其餘基解均可簡單地求得。

表 3.3

#	NBV	BS	BFS	Z
1	x_1, x_2, x_3	$\bar{\mathbf{x}} = (0,0,0,24,8,10)$	Yes	0
2	x_1, x_2, x_4	No		
3	x_1, x_2, x_5	$\bar{\mathbf{x}} = (0,0,8,24,0,2)$	Yes	24
4	x_1, x_2, x_6	$\bar{\mathbf{x}} = (0,0,10,24,-2,0)$	No	30
5	x_1, x_3, x_4	$\bar{\mathbf{x}} = (0,12,0,0,-4,10)$	No	24
6	x_1, x_3, x_5	$\bar{\mathbf{x}} = (0,8,0,8,0,10)$	Yes	16
7	x_1, x_3, x_6	No	No	
8	x_1, x_4, x_5	$\bar{\mathbf{x}} = (0,12,-4,0,0,14)$	No	12
9	x_1, x_4, x_6	$\bar{\mathbf{x}} = (0,12,10,0,-14,0)$	No	54
10	x_1, x_5, x_6	$\bar{\mathbf{x}} = (0,-2,10,28,0,0)$	No	26
11	x_2, x_3, x_4	$\bar{\mathbf{x}} = (8,0,0,0,0,-6)$	No	24
12	x_2, x_3, x_5	$\bar{\mathbf{x}} = (8,0,0,0,0,-6)$	No	24
13	x_2, x_3, x_6	$\bar{\mathbf{x}} = (5,0,0,9,3,0)$	Yes	15
14	x_2, x_4, x_5	$\bar{\mathbf{x}} = (8,0,0,0,0,-6)$	No	24
15	x_2, x_4, x_6	$\bar{\mathbf{x}} = (8,0,-6,0,6,0)$	No	6
16	x_2, x_5, x_6	$\bar{\mathbf{x}} = (2,0,6,18,0,0)$	Yes	24
17	x_3, x_4, x_5	$\bar{\mathbf{x}} = (8,0,0,0,0,-6)$	No	24
18	x_3, x_4, x_6	$\bar{\mathbf{x}} = (5,4.5,0,0,-1.5,0)$	No	24
19	x_3, x_5, x_6	$\bar{\mathbf{x}} = (5,3,0,3,0,0)$	Yes	21
20	x_4, x_5, x_6	$\bar{\mathbf{x}} = (5.6,3.6,-1.2,0,0,0)$	No	24

(b) 如表中所示，#1, #3, #6, #13, #16, #19 六個 BS 是可行基解（BFS），其餘基解均是不可行的。（註：其中#2 與#7 不是基解。）

(c) 在六個 BFS 中，Z 值最大者即爲最佳解，因此最佳解有兩個（#3 與#16），分別爲 $\bar{\mathbf{x}} = (0,0,8,24,0,2), Z = 24$ 及 $\bar{\mathbf{x}} = (2,0,6,18,0,0)$, $Z = 24$ 。

7. 以單形法的代數程序求解以下問題：

$$
\begin{aligned}
&\text{極大化} \quad Z = 3x_1 + 2x_2 \\
&\text{受限於} \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 8 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 6 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Sol. 以單形法代數程序求解此問題的過程如表 3.4 所示，最佳解爲：$\bar{\mathbf{x}} = (2, 4, 0, 0), Z = 14$。

表 3.4

迭代	NBV	將 Z 與 BV 以 NBV 表示	BFS	最佳解測試	決定離開變數
0	x_1, x_2	$Z = 3x_1 + 2x_2$ $x_3 = 8 - 2x_1 - x_2$ $x_4 = 6 - x_1 - x_2$	$\bar{\mathbf{x}} = (0,0,8,6)$ $Z = 0$	$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = 3^*$ $\frac{\partial Z}{\partial x_2} = 2$	$x_1 \le 4^*$ $x_1 \le 6$
1	x_2, x_3	$Z = 12 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3$ $x_1 = 4 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$ $x_4 = 2 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$	$\bar{\mathbf{x}} = (4,0,0,2)$ $Z = 12$	$\frac{\partial Z}{\partial x_2} = \frac{1}{2}^*$ $\frac{\partial Z}{\partial x_3} = -\frac{3}{2}$	$x_2 \le 8$ $x_2 \le 4^*$
2	x_3, x_4	$Z = 14 - x_3 - x_4$ $x_1 = 2 - x_3 + x_4$ $x_2 = 4 + x_3 - 2x_4$	$\bar{\mathbf{x}} = (2,4,0,0)$ $Z = 14$	$\frac{\partial Z}{\partial x_3} = -1$ $\frac{\partial Z}{\partial x_4} = -1$ 最佳解	

8. 以單形法求解以下問題：

$$\begin{aligned} &\text{極大化} \quad Z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ &\text{受限於} \\ &\qquad 3x_1 + 2x_2 \le 24 \\ &\qquad x_1 + x_2 + x_3 \le 8 \\ &\qquad 2x_1 + x_3 \le 10 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Sol. 以單形法求解此問題的完整單形表如表 3.5 所示，最佳解為：
$\overline{\mathbf{x}} = (2, 0, 6, 18, 0, 0), Z = 24$

表 3.5

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	r
Z	1	-3	-2	-3	0	0	0	0	
x_4	0	3	2	0	1	0	0	24	8
x_5	0	1	1	1	0	1	0	8	8
x_6	0	$\boxed{2}$	0	1	0	0	1	10	5
Z	1	0	-2	$-\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	15	
x_4	0	0	2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{3}{2}$	9	$\frac{9}{2}$
x_5	0	0	$\boxed{1}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	3	3
x_1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	5	-
Z	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{1}{2}$	21	
x_4	0	0	0	$-\frac{5}{2}$	1	-2	$-\frac{1}{2}$	3	-
x_2	0	0	1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	3	6
x_1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	5	10
Z	1	0	1	0	0	3	0	24	
x_4	0	0	5	0	1	3	-3	18	
x_3	0	0	2	1	0	2	-1	6	
x_1	0	1	-1	0	0	-1	1	2	

10. 以單形法求解以下問題，且不得使用任何人工變數：

$$\text{極大化} \quad Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4$$

受限於

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6$$
$$3x_1 + x_3 + x_4 \geq 9$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

（提示：分別以 x_2 與 x_4 作爲兩限制式的起始 BV。）

Sol. 以單形法求解此問題之完整單形表如表 3.7 所示，最佳解爲：$\overline{\mathbf{x}} = (3,0,0,0,0)$, $Z = 6$ 。

表 3.7

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	r
Z	1	-2	-3	-2	4	0	0	
x_2	0	2	1	3	0	0	6	3
x_4	0	3	0	1	1	-1	9	3
Z	1	-8	0	3	0	4	-18	
x_2	0	$\boxed{2}$	1	3	0	0	6	3
x_4	0	3	0	1	1	-1	9	3
Z	1	0	4	15	0	4	6	
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	3	
x_4	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	1	-1	0	

12. 考慮以下問題：

$$\text{極大化} \quad Z=-2x_1+6x_2+4x_3$$
$$\text{受限於}$$
$$5x_1+7x_2+x_3 \le 35$$
$$-x_1+3x_2+2x_3 \le 6$$
$$x_1,x_2,x_3 \ge 0$$

(a) 以單形法驗證此問題具有多重最佳解。

(b) 寫出此問題的其中五個最佳解。

Sol. (a) 此問題的完整單形表如表 3.10 所示。因第二個單形表中已得到最佳解，但非基變數 x_1 的 Z 列係數為零，因此具有多重最佳解。讓 x_1 為進入變數，可得第三個單形表。由第二個與第三個單形表，可得多重最佳解如下：

$$\mathbf{x}'=(0,2,0,21,0)$$
$$\mathbf{x}''=\left\{\frac{63}{22},\frac{65}{22},0,0,0\right\}=(2.864,2.955,0,0,0)$$

$$\overline{\mathbf{x}}=\alpha\mathbf{x}'+(1-\alpha)\mathbf{x}''$$

$$\alpha=0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{x}}_1=(2.864,2.955,0,0,0)$$
$$\alpha=0.1 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{x}}_2=(2.577,2.859,0,2.1,0)$$
$$\alpha=0.3 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{x}}_3=(2.005,2.668,0,6.3,0)$$
$$\alpha=0.5 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{x}}_4=(1.432,2.477,0,10.5,0)$$
$$\alpha=1.0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{x}}_5=(0,2,0,21,0)$$

以上各組解的 Z 均為 12。

表 3.10

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	r
Z	1	2	-6	-4	0	0	0	
x_4	0	5	7	1	1	0	35	5
x_5	0	-1	$\boxed{3}$	2	0	1	6	2
Z	1	0	0	0	0	2	12	
x_4	0	$\boxed{\frac{22}{3}}$	0	$-\frac{11}{3}$	1	$-\frac{7}{3}$	21	
x_2	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2	
Z	1	0	0	0	0	2	12	
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{22}$	$-\frac{7}{22}$	$\frac{63}{22}$	
x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{5}{22}$	$\frac{65}{22}$	

13. 考慮表 3.11 的單形表。寫出以下各情況下之 a 、b 、c 、d 各係數的條件：

(a) 此問題有唯一最佳解。

(b) 此問題有多重最佳解。

(c) 此問題是無窮解。

(d) 下一個單形表之 BFS 爲退化 BFS。

表 3.11

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	r
Z	1	0	a	0	b	26	
x_3	0	0	-1	1	d	6	
x_1	0	1	c	0	1	3	

Sol. **(a)** $a,b>0$ 。

(b) $a,b\geq 0$ ，且 a 或 $b=0$ 。

(c) $a<0, c\leq 0$ 。

(d) $b<0,\ b<a,\ d=2$ 。

15. 以大 M 法求解以下問題：

$$\text{極小化}\quad Z=5x_1-6x_2-8x_3$$

受限於

$$2x_1+x_2+3x_3\leq 4$$
$$3x_1+4x_2+2x_3\geq 12$$
$$x_1,x_2,x_3\geq 0$$

Sol. 此問題的 P(M)如下：

P(*M*)：極小化　$Z = 5x_1 - 6x_2 - 8x_3 + M\bar{x}_6$

受限於

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_5 + \bar{x}_6 = 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \bar{x}_6 \geq 0$$

此問題的完整單形表如表 3.13 所示，因在最佳單形表中，基變數已無人工變數，所以此問題的最佳解為：$\bar{\mathbf{x}} = (0,4,0,0,4,0), Z = -24$ 。

表 3.13

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	RHS	r
Z	1	-5	6	8	0	0	$-M$	0	
x_4	0	2	1	3	1	0	0	4	
$\bar{x}_6$	0	3	4	2	0	-1	1	12	
Z	1	$3M-5$	$4M+6$	$2M+8$	0	$-M$	0	$12M$	
x_4	0	2	1	3	1	0	0	4	
$\bar{x}_6$	0	3	$\boxed{4}$	2	0	-1	1	12	
Z	1	$-\frac{19}{2}$	0	5	0	$\frac{3}{2}$		-18	
x_4	0	$\frac{5}{4}$	0	$\boxed{\frac{5}{2}}$	1	$\frac{1}{4}$		1	
x_2	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$		3	
Z	1	-12	0	0	-2	1		-20	
x_3	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{2}{5}$	$\boxed{\frac{1}{10}}$		$\frac{2}{5}$	
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$		$\frac{14}{5}$	
Z	1	-17	0	-10	-6	0		-24	
x_5	0	5	0	10	4	1		4	
x_2	0	2	1	3	1	0		4	

16. 以雙階法求解習題 15 的問題。

Sol. 使用雙階法求解，其第一階段問題爲

$$
\begin{aligned}
&\text{P(I)}：極小化 \quad Z = \bar{x}_6 \\
&\qquad 受限於 \\
&\qquad\qquad 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\
&\qquad\qquad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_5 + \bar{x}_6 = 12 \\
&\qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \bar{x}_6 \ge 0
\end{aligned}
$$

問題 P(I)的完整單形表如表 3.14 所示。因爲在 P(I)的最佳單形表中，所有人工變數均爲零，所以可以進入第二階段。

在第二階段（參見表 3.15），我們使用 P(I)的最佳單形表，並刪除所有人工變數，且使用原問題的目標函數，可得第一個單形表。還原 Z 列後，即可得到代表起始 BFS 的第二個單形表。繼續求解程序，可以得到原問題的最佳解爲：$\bar{\mathbf{x}} = (0,4,0,0,4), Z = -24$ 。

表 3.14

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	RHS	r
Z	1	0	0	0	0	0	-1	0	
x_4	0	2	1	3	1	0	0	4	
$\bar{x}_6$	0	3	4	2	0	-1	1	12	
Z	1	3	4	2	0	-1	0	12	
x_4	0	2	1	3	1	0	0	4	
$\bar{x}_6$	0	3	$\boxed{4}$	2	0	-1	1	12	
Z	1	0	0	0	0	0		0	
x_4	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{4}$		1	
x_2	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$		3	

表 3.15

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	r
Z	1	-5	6	8	0	0	0	
x_4	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	1	
x_2	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	3	
Z	1	$-\frac{19}{2}$	0	5	0	$\frac{3}{2}$	-18	
x_4	0	$\frac{5}{4}$	0	$\boxed{\frac{5}{2}}$	1	$\frac{1}{4}$	1	
x_2	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	3	
Z	1	-12	0	0	-2	1	-20	
x_3	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{2}{5}$	$\boxed{\frac{1}{10}}$	$\frac{2}{5}$	
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{14}{5}$	
Z	1	-17	0	-10	-6	0	-24	
x_5	0	5	0	10	4	1	4	
x_2	0	2	1	3	1	0	4	

17. 以雙階法求解以下問題：

$$\text{極小化} \quad Z = 4x_1 + 7x_2$$

受限於

$$x_1 + 3x_2 \le 15$$
$$5x_1 + 6x_2 \ge 30$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Sol. 使用雙階法求解，其第一階段問題爲

$$\text{P(I)：極小化 } Z = \bar{x}_5$$

受限於

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$
$$5x_1 + 6x_2 - x_4 + \overline{x}_5 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \overline{x}_5 \geq 0$$

問題 P(I)的完整單形表如表 3.16 所示。因為在 P(I)的最佳單形表中，所有人工變數均為零，所以可以進入第二階段。

表 3.16

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{x}_5$	RHS	r
Z	1	0	0	0	0	-1	0	
x_3	0	1	3	1	0	0	15	
$\overline{x}_5$	0	5	6	0	-1	1	30	
Z	1	5	6	0	-1	0	30	
x_3	0	1	3	1	0	0	15	
$\overline{x}_5$	0	5	$\boxed{6}$	0	-1	1	30	
Z	1	0	0	0	0		0	
x_3	0	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$		0	
x_2	0	$\frac{5}{6}$	1	0	$-\frac{1}{6}$		5	

在第二階段（參見表 3.17），我們使用 P(I)的最佳單形表，並刪除所有人工變數，且使用原問題的目標函數，可得第一個單形表。還原 Z 列後，即可得到代表起始 BFS 的第二個單形表。繼續求解程序，可以得到原問題的最佳解為：$\mathbf{\overline{x}} = (6, 0, 9, 0), Z = 24$。