集合

自從 19 世紀末著名德國數學家康托(G. Cantor)為集合論做奠基工作以來，集合(set)已經發展成為數學及其它各學科不可缺少的描述工具，並且成為數學中最為基本的概念。

I. 集合及其表示法

集合論分成兩種體系，一種是**樸素集合論體系(Naive set theory)**，也即**康托集合論體系**。在這個體系中，康托從抽象原則出發，概括出：滿足某條性質的個體放在一起組成集合，在這樣的概括中隱含著矛盾，這就是這名的羅素(Russell)詭論(paradox)[1]。為了消除詭論，後來才產生了**公理集合論體系(Axiomatic set theory)**，公理集合論屬於數理邏輯範疇。

本處所介紹的集合論內容屬於樸素集合論範疇，我們不給集合下嚴格的定義，但這絲毫不影響對集合這一基本概念的理解，也不影響集合已經成為數學中最為基本的概念的事實。人們常用**大寫英文字母** $A,B,C,\cdots$ 表示集合，並用 $x\in A$ 表示 x 是集合 A 中的**元素**(element)，讀作"x 屬於 A"，而用 $x\notin A$ 表示 x 不是集合 A 中的元素，讀作"x 不屬於 A"。

一般來說，集合有兩種**表示法**：列舉法與描述元素性質法。

列舉法：列出集合中的全體元素，元素之間用逗號分開，然後用大括弧括起來。例如，

$A=\{a,b,c,d\}$

$B=\{$書，辦公桌，門，黑板$\}$

$C=\{1,\sqrt{2},-5\}$

$D=\{$台南，地球，宇宙$\}$

等，都是列出集合中全體原宿法來表示的集合。

描述元素性質法：$P(x)$ 表示 x 具有性質 P，用 $\{x\,|\,P(x)\}$ 表示具有性質 P 的全體元素組成的集合。例如，$A_1=\{x\,|\,x$是英文字母$\}$

$A_2=\{x\,|\,x$是偶質數$\}$

$A_3=\{x\,|\,x$是自然數$\}$

等，都是用描述集合中元素性質法表示的集合。

關於集合及表示法應注意以下幾點：

(1) 集合中的元素各不相同。例如，$\{1,2,3,4\}$，$\{1,1,2,3,4\}$ 是相同的集合，它們都是含元素 $1,2,3,4$ 的集合，因而是一個集合，即 $\{1,2,3,4\}=\{1,1,2,3,4\}$。

---

[1] **羅素詭論**，羅素於 1901 年提出的詭論，是一個關於類的內涵問題。我們通常希望：任給一個性質，滿足該性質的所有類可以組成一個類。但這樣的企圖將導致詭論：

羅素詭論：設性質 $P(x)$ 表示「$x\notin x$」，現假設由性質 P 確定了一個類 A—也就是說「$\forall x(x\in A\Leftrightarrow x\notin x)$」。那麼現在的問題是：$A\in A$ 是否成立？首先，若 $A\in A$，則 A 是 A 的元素，那麼 A 具有性質 P，由性質 P 知 $A\notin A$；其次，若 $A\notin A$，也就是說 A 具有性質 P，而 A 是由所有具有性質 P 的類組成的，所以 $A\in A$。

羅素詭論還有一些更為通俗的描述，如理髮師詭論：

理髮師詭論：某理髮師發誓「要給所有不自己理髮的人理髮，不給所有自己理髮的人理髮」，現在的問題是「誰為該理髮師理髮？」。首先，若理髮師給自己理髮，那他就是一個「自己理髮的人」，依其誓言「他不給自己理髮」；其次，若「他不給自己理髮」，依其誓言，他就必須「給自己理髮」。

羅素詭論在類的理論中通過內涵公理而得到解決。

(2) 集合中的元素不規定次序。例如，$\{a,b,c\}=\{b,c,a\}$

(3) 有些集合的表示法可以互相轉換，有些則不能。例如

$$A_1=\{x\,|\,x\text{是英文字母}\}=\{a,b,\cdots,y,z\}$$

$$A_2=\{x\,|\,x\text{是偶質數}\}=\{2\}$$

$$A_3=\{x\,|\,x\text{是自然數}\}=\{1,2,3,\cdots\}$$

下面給一些常用的**數集合的表示法**：

$$\mathbb{N}=\{x\,|\,x\text{爲自然數}\}=\{1,2,3,\cdots\}$$

$$\mathbb{Z}=\{x\,|\,x\text{爲整數}\}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$$

$$\mathbb{Q}=\{x\,|\,x\text{爲有理數}\}=\{\frac{p}{q}\,|\,p,q\in\mathbb{Z},q\neq 0\}$$

$$\mathbb{R}=\{x\,|\,x\text{爲實數}\}=(-\infty,\infty)$$

II. 集合之間的包含與相等

定義：設 A,B 為兩個集合，若 B 中的元素都是 A 中的元素，則稱 B 是 A 的子集合，也稱 A 包含 B，或 B 包含於 A，記作 $B\subseteq A$，並用 $B\not\subseteq A$ 表示 B 不是 A 的**子集合(subset)**。簡言之，

$$B\subseteq A\Leftrightarrow\forall x(x\in B\to x\in A)$$

$$B\not\subseteq A\Leftrightarrow\exists x(x\in B\wedge x\notin A)$$

設 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,c,d\}$，$C=\{a,c\}$，則 $A\subseteq A$，$A\subseteq B$，$B\subseteq B$，$C\subseteq A$，$C\subseteq B$，$C\subseteq C$，而 $B\not\subseteq A$，$B\not\subseteq C$。

從定義不然看出，對於任意的集合 A，均有 $A\subseteq A$。對於任意的三個集合 A，B 與 C，若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，則 $A\subseteq C$。

定義：設 A,B 為兩個集合，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，則稱 A 與 B **相等(equal)**，記作 $A=B$，即

$$A=B\Leftrightarrow(A\subseteq B\wedge B\subseteq A)$$

而 A 不等於 B，記作 $A\neq B$，

$$A\neq B\Leftrightarrow A\not\subseteq B\vee B\not\subseteq A$$

設 $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\wedge(x^2+x-6=0)\}$

$B=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\wedge(x^3+3x^2-4x-12=0)\}$

$C=\{-3,2\}$

由於 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$，$x^3+3x^2-4x-12=(x+3)(x-2)(x+2)$，可知 $A=C$，而 $B\neq A$(當然，$A\neq B$)。

定義：設 A,B 為兩個集合，若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，則稱 A 為 B 的**真子集合(proper subset)**，記作 $A\subset B$，其實，

$$A\subset B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\to x\in B)\wedge\exists x(x\in B\wedge x\notin A)$$

易知 $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$。

定義：稱不擁有任何元素的集合為空集合，記作 $\varnothing$。

集合 $\{x\,|\,(x^2+1<1)\wedge x\in\mathbb{R}\}$，$\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\wedge(x^2+2x+5=0)\}$ 都不擁有任何元素，因而它們都是空集合。

定理：空集合是任何集合的子集合。

推論：空集合是唯一的。

由本推論可知，空集合雖然有各種不同的表示形式，但它們都是唯一的，例如，

$$\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\wedge x\neq x\}=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\wedge x^2+1=0\}=\varnothing$$

空集合是一切集合的子集合，從這個意義上看，可以形象地說：$\varnothing$是"最小"的集合。有沒有最大的集合？答案是否定的，但當對某些具體問題時，可以定義一個具有相對性的"最大"的集合，見下面定義，

定義：如果限定所對應的的集合都是某一集合U的子集合，則稱U為**宇集合(universal set)**。

從定義可以看出，不同的實際問題可以定義出不同的宇集合，因而無統一的的宇集合，這與空集合的唯一性是完全不同的。就是同一個實際問題，也可以給出不同的宇集合，例如，討論區間(a,b)上實數性質時，$E_1=(a,b)$，$E_2=[a,b)$，$E_3=(a,b]$，$E_4=[a,b]$，$E_5=(a,+\infty)$，…都考以當作宇集合，"最小"的是E_1，可見就是對同一個問題，宇集合也是不唯一的。

III. 集合的冪集合

定義：設A為一個集合，由A的所有子集合組成的集合稱為A**冪集合(power set)**，記為$P(A)$，即$P(A)=\{x\,|\,x\subseteq A\}$。

例：設$A=\{a,b,c\}$，則$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

元素個數有限的集合稱為有限集合，並用$|A|$表示A中元素個數。

定理：設A為n個元素的集合，則$P(A)$有2^n個元素。

IV. 集合的運算

定義：設A,B為兩個集合：

(1) 由A與B的全體元素所組成的集合稱為A與B的**聯集(union)**，記作$A\bigcup B$，即$A\bigcup B=\{x\,|\,x\in A\vee x\in B\}$；

(2) 由A與B的共同元素所組成的集合稱為A與B的**交集(intersection)**，記作$A\bigcap B$，即$A\bigcap B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\in B\}$；

(3) 屬於A而不屬於B的元素所組成的集合稱為B對A的**差集(difference)**，記作$A-B$，即$A-B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}$；

(4) 屬於A而不屬於B，或屬於B而不屬於A的元素所組成的集合稱為A與B的**對稱差集(symmetric difference)**，記作$A\oplus B$，即$A\oplus B=\{x\,|\,(x\in A\wedge x\notin B)\vee\ (x\in B\wedge x\notin A)\}$；

(5) 設U為宇集合，$A\subseteq U$，稱$U-A$為A的**補集(complement)**，記作$\sim A$，A^c，$\overline{A}$，即$\sim A=\{x\,|\,x\notin A\}$

設$A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{a,c,e,g\}$，則

$$A\bigcup B=\{a,b,c,d,e,g\}\quad A\bigcap B=\{a,c,e\}\quad A-B=\{b,d\}$$
$$B-A=\{g\}\quad A\oplus B=\{b,d,g\}$$

取宇集合$U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$，則$\sim A=\{f,g,h\}$

$$\sim B=\{b,d,f,h\}$$

例 1：設U是某中學高中一年級學生集合，A,B是E的子集合，且$A=\{x\,|\,x\text{是男生}\}$，$B=\{x\,|\,x\text{是足球隊員}\}$，試用描述法表示$A\bigcup B, A\bigcap B, A-B, B-A, A\oplus B, \sim A$。

解：
$A\bigcup B=\{x\,|\,x\text{是男生或是足球隊員}\}$

$A\bigcap B=\{x\,|\,x\text{是男生足球隊員}\}$

$A-B=\{x\,|\,x\text{是非足球隊員的男生}\}$

$B-A=\{x\,|\,x\text{是女生足球隊員}\}$

$A\oplus B=\{x\,|\,x\text{是非足球隊員的男或是女生足球隊員}\}$

$\sim A=\{x\,|\,x\text{是女生}\}$

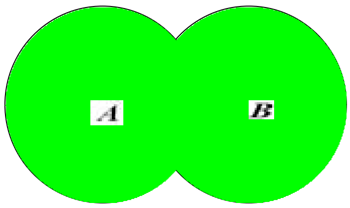
定義：設 A, B 為兩個集合，若 $A \cap B = \varnothing$，則稱 A 與 B 為**互斥(disjoint)**。

設 $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x\text{為奇數}\}$，$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x\text{為偶數}\}$，則 A 與 B 為互斥。$\varnothing$ 與任何集合都是互斥的。

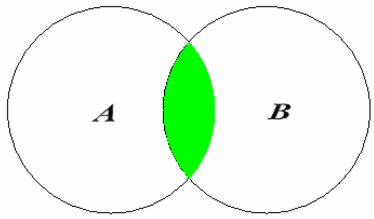
集合之間的關係與運算結果可以用文氏圖直觀地表示，文氏圖的構造下：

用一個矩形內部的點表示宇集合 U，用矩形內部的圓或其他簡單閉曲線內部的點表示 E 的子集合，用陰影區域表示集合之間運算結果構造的新的集合。

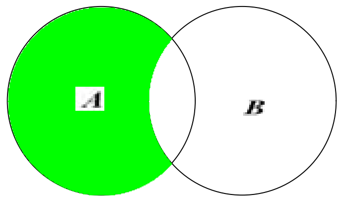
設 A, B 均為宇集合 U 的子集合，下圖給出了 $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A, A \oplus B, \sim A$ 的文氏圖。



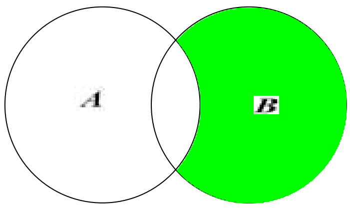
$A \cup B$



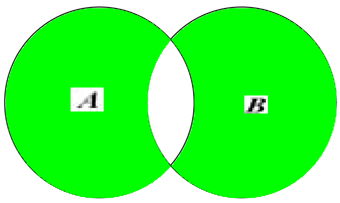
$A \cap B$



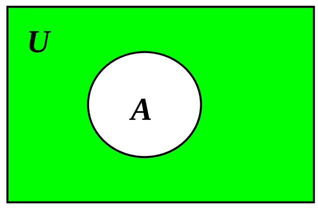
$A - B$



$B - A$



$A \oplus B$



~A

集合的聯集和交集可以推廣到多個或無限多個集合上。設 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 為 n 個集合，它們的聯集簡記為 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，即 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$

它們的交集簡記為 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$，即 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}$

例 2：設 $A_i = \left[0, \frac{1}{i}\right)$，$B_i = (0, i)$，$i = 1, 2, \cdots$，求：

(1) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$; (2) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i; \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$; (3) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i; \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$; (4) $\bigcap_{i=1}^{n} B_i; \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$

解：(1) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = [0,1); \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = [0,1)$; (2) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left[0, \frac{1}{n}\right); \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$;

(3) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = (0, n); \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = (0, +\infty)$; (4) $\bigcap_{i=1}^{n} B_i = (0,1); \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = (0,1)$

參考資料：

1. C.L. Liu, Elements of Discrete Mathematics, 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1985.
2. K.H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, 5th ed., McGraw-Hill, New York, 2003.
3. 張淑珠，離散數學，第二版，高立圖書。
4. 屈婉玲、耿素云、張立昂，離散數學，清華大學出版社(大陸)