邏輯

邏輯(Logic)是由希臘思想家亞里斯多德(Artstotle-384-322)所創立。經歷了長時期的發展、停頓、轉變，使它得到一個與數學類似的性質，這種新形式通稱為數理邏輯(Mathematical Logic)。邏輯法則使我們能精準地陳述數學，利用這些邏輯法則能輕易地分辨一個數學論證的真偽。

I. 命題(Proposition)

任何一個可以說明真或偽的句子(sentence)或陳述(statement)都是一個**命題(proposition)**。

例題 1：下列陳述都是命題。

(1) 台北市是中華民國的一個院轄市。

(2) $1+1=2$

(3) 美國第四十三任總統是(小)布希。

(4) $2+5=6$

其中命題(1)，(2)，(3)都是真，但 (4)是偽。

例題 2：下列陳述何者是命題？

(1) 美國現任總統是(小)布希。

(2) $x+1=2$

(3) 九一一事件是個恐佈事件。

(4) 這是綠色。

(5) $x+y=z$

(6)現在幾點了？

(7)火星上有生物。

說明： (1) 是。雖然答案會依時間改變而不同，比如，在 1998 年時此命題是偽，因為當時的美國總統是柯林頓。但在 2002 宰時它就是真了。

(2) 不是。因為，是變數，不是明確的一個數，所以此句無法分辨真偽。

(3) 是。雖然對多數美國人而言，此句是真，但對激進派回教份子而言，此句可能是偽。

(4) 不是。無法辨真偽。

(5) 不是。

(6) 不是。因為此句不算是一個陳述。

(7) 是。

II 真值表(Truth Table)

我們通常以小寫字母 $p,q,r,s,\cdots$ 表示命題，以 T 表示真(True)，F 表示偽(False)。許多數學化的陳述都是由一個或數個命題組合而成的叫複合命題(composite proposition)。下面我們介紹這些語句的演算法。為了正確地了解這個複合命題的真偽，我們使用真值表(Truth Table)來顯示各命題真偽問的關連。

1. 借助"非"(Negation)，可以形成 p 的否定命題 (Negation of p)，記作 $\sim p$。
2. 利用"且"(And)將兩個(或多個)命題 p,q 連結，成為並聯命題(Conjunction)，記作 $p\wedge q$。
3. 利用"或"(Or)將兩個(或多個)命題 p,q 連接，成為選言命題(Disjunction)，記作 $p\vee q$。
4. 利用"若 p，則 q"把兩個語句連貫起來，所得的複合語句稱為蘊涵命題(Implication)，記作 $p\rightarrow q$。此時，p 稱為條件語句(Hypothesis)，q 稱為結論語句(Conclusion)。

例題 3：(1) 設 p 表示"$2+2=4$"則 $\sim p$ 表示"$2+2\neq 4$"。

(2) 設 p 表示"2 是一個自然數"，q 表示"$2<3$"，那麼 $p \wedge q$ 表示"2 是一個自然數且 $2<3$”，以口語來說就是"2 是一個小於 3 的自然數"。

(3) 如(2)中的 p 與 q，則 $p \vee q$ 表示"2 是一個自然數或 $2<3$"。

在邏輯上為避免受心理因素干擾，我們一致視"若 p，則 q"是有意義的語句，而且此蘊函命題的真偽完全決定於 p 與 q 的真偽關係。接下來，我們將相關的真值表列出來。

p	$\sim p$
T	F
F	T

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例題 4：試判別下列複合語句的真偽。

(1) $2<3$ 且 2 是無理數。

(2) $2<3$ 或 2 是無理數。

(3) 若 $2\times 2=4$，則紐約是大城市。

(4) 若 $2\times 2=4$，則紐約是小城市。

(5) 若 $2\times 2=5$，則紐約是大城市。

(6) 若 $2\times 2=5$，則紐約是小城市。

解：(1)F　(2)T　(3)T　(4)F　(5)T　(6)T

III 逆，否，否逆命題

從蘊涵命題 $p \to q$ 可以導出下列相關的語句。

1. $p \to q$ 的逆命題(Converse Proposition)是 $q \to p$。
2. $p \to q$ 的否命題 (Inverse Proposition)是 $\sim p \to \sim q$
3. $p \to q$ 的否逆命題 (Contrapositive Proposition)是 $\sim q \to \sim p$。

例題 5："若 x 是一個正數，則 $2x$ 是一個正數"為原語句；則它的逆語句為 "若 $2x$ 是一個正數，則 x 是一個正數"。

例 5 顯示出 $p \to q$ 和 $q \to p$ 兩者都是真。這時候我們常用"若且唯若"(if and only if)來連接 p 與 q。所以，我們可以說"x 是一個正數，若且唯若 $2x$ 是一個正數"。記作：x 是一個正數 $\leftrightarrow$ $2x$ 是一個正數。

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

由真值表中可看出 $p \leftrightarrow q$ 只有在 p 與 q 同時為真或同時為偽時才是真。這時我們稱 q 是 p 成立的充分且必要條件，當然 p 是 q 成立的充分且必要 (簡稱充要)條件。若 p 則 q 是真，那麼稱 p 是 q 成立的充分條件，q 是 p 成立的必要條件。如"$p \to q$"為真但"$q \to p$"為偽，那麼 p 就叫做 q 成立的充分但非必要的條件。

例題 6：令 p 表"$1+1=3$"，q 表"$(1+1)+5=3+5$"。則 p 與 q 均偽 。但是，$p \to q$ 是真，且 $q \to p$

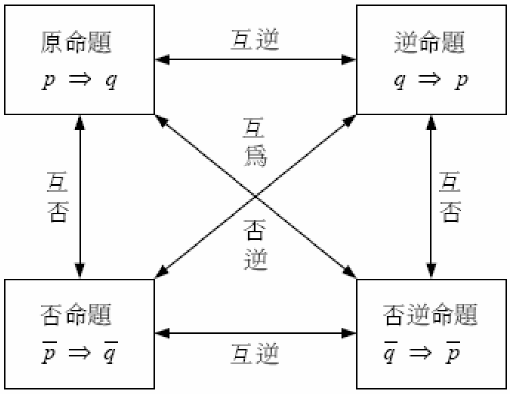
也是真。所以$1+1=3 \leftrightarrow (1+1)+5=3+5$。

例題 7：令 $p \to q$ 表"若一個四邊形是正方形，則它是一個長方形。"其逆命題：$q \to p$ 表"若一個四邊形是一個長方形，則它是一個正方形。"顯然，$p \to q$ 是真，但$q \to p$ 是偽。

$p \to q$ 的否逆命題：$\sim q \to \sim p$ 表"若一個四邊形不是長方形，則它不是正方形。"此句也是真。

$p \to q$ 的否命題：$\sim p \to \sim q$ 表"若一個四邊形不是正方形則它不是一個長方形。"此句是偽。

由上述幾個例予可以看出這四種命題之間有下列關係。



互為否逆的兩個命題，它們同時真或同時偽的性質，通常叫做否逆命題的等價性質(Equivalent)。用符號表示，則為

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$$

$$(q \to p) \Leftrightarrow (\sim p \to \sim q)$$

下面我們列出一些常用且重要的等價性質。

1.	$p \wedge T \Leftrightarrow p$ $p \vee F \Leftrightarrow p$	T 為$\wedge$運算的單位元(Identity) F 為$\vee$運算的單位元
2.	$p \vee T \Leftrightarrow T$ $p \wedge F \Leftrightarrow F$	T 為$\vee$運算的控制元(Dominator) F 為$\wedge$運算的控制元
3.	$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	冪零律(Idempotent Laws)
4.	$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$	雙否定律(Double negative Law)
5.	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	交換律(Commutative Laws)
6.	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	結合律(Ass0ctative Laws)
7.	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	分配律 (Distributive Laws)
8.	$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$	狄摩根(DeMorgan)律

IV. 恆真，恆偽語句

假如無論子命題的真偽為何，複合命題永遠是真，那麼這個複合命題就稱為恆真語句(Tautology)。反之，若複合命題永遠是偽，則稱為恆偽語句(Contradiction)。若複合命題既不是恆真也不是恆偽，就稱為偶發語句(Contingency)。

例題 8：

(1) $p \vee \overline{p}$ 是恆真語，$p \wedge \overline{p}$ 是恆偽語。$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ 是恆真語。

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$	$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$
T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T

(2) $p \to (q \to (p \wedge q))$ 是恆真語，因為

p	q	$p \wedge q$	$q \to p \wedge q$	$p \to (q \to (p \wedge q))$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	F	T
F	F	F	T	T

V. 命題函數及真值集(Propositional Function and Truth Set)

一個定義在集合 X 上的函數，如果它的值域是一個命題集合的話，這個函數就稱為一個命題函數(Propositional Function)。

例題 9：在整數集 $\mathbb{Z}$ 上，定義命題函數 Q 為

$$Q(x) = "2x - 3 = 7"$$

那麼 $Q(2)$ 就是 $"2\times 2 - 3 = 7"$，這是一個偽命題，而 $Q(5)$ 表 $"2\times 5 - 3 = 7"$ 是一個真命題 。

例題 10：在實數集 $\mathbb{R}$ 上，定義命題函數 P 為

$$P(x) = "(x > 2) \wedge (x < 6)"$$

那麼 $P(5)$ 表 $"(5 > 2) \wedge (5 < 6)"$ 是真命題，但 $P(10)$ 表 $"(10 > 2) \wedge (10 < 6)"$ 是偽命題。

一個命題函數的真值集(Truth Set)是定義域的一個子集合，其內元素的像都是真命題。譬如，例 9 中的真值集是$\{5\}$，而例 10 的真值集為開區間 $(2,6)$ 。

數個命題函數也可以用連結詞聯結起來而形成新命題函數。假設 P, Q 都定定義在 X 上的命題函數，則 $\overline{P}$ ，$P \wedge Q$ ，和 $P \vee Q$ 定義如下：

$$(\overline{P})(x) = \overline{P(x)}$$
$$(P \wedge Q)(x) = P(x) \wedge Q(x)$$
$$(P \vee Q)(x) = P(x) \vee Q(x)$$

因此它們的真值集就有下述關係：

1. $\overline{P}$ 的真值集 $=$ P 的真值集的補集合。
2. $P \wedge Q$ 的真值集 $=$ P 和 Q 的真值集的交集。
3. $P \vee Q$ 的真值集 $=$ P 和 Q 的真值集的聯集。

例題 11：設 P, Q 都定義在 $\mathbb{Z}$ 上，並且 $P(x) = "x < 0"$，$Q(x) = "x < 5"$，試求 $\overline{P} \wedge Q$ 的真值集。

解：P 的真值集為$\{\cdots, -3, -2, -1\}$，

$\overline{P}$ 的真值集為 $\mathbb{Z} - \{\cdots, -3, -2, -1\} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$，

Q 的真值集為$\{\cdots, 0, 1, 2, 3, 4\}$

因此，$\overline{P} \wedge Q$ 的真值集為 $\{0, 1, 2, 3, \cdots\} \bigcap \{\cdots, 0, 1, 2, 3, 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

VI. 存在與全稱量詞(Existential and Universal Quantifiers)

在數理邏輯中有兩個量詞扮演極重要的角色。它們是

1. 存在量詞(Existential Quantifier)：

記作$\exists$，用來描述具某種特性的事物的存在性問題。符號$\exists xP(x)$，讀做 "存在x($\in$定義域)，使得命題$P(x)$為真"。

因此，若命題函數P的真值集非空的話，就一定存在，(即可找得到x)使得$P(x)$是真命題。

例題 12：若P的定義域為$\mathbb{Z}$且$P(X)=$"$x+1=3$"，那麼P的真值集為$\{2\}$。當然就存在$x=2$滿足式子$x+1=3$!換言之，$\exists xP(x)$或$\exists x$使得$x+1=3$成立。

例題 13：若P的定義域為$\mathbb{R}$且$P(x)=$"$x^2=-1$"，那麼$\exists xP(x)$意即"找得到實數x滿足方程式$x^2=-1$"，這是不對的，因為它的真值集為$\varnothing$故$\exists xP(x)$是偽命題。

2. 全稱量詞(Universal Quantifier)：

記作$\forall$，用來描述整個定義域中的元素都具某一特性。命題$\forall xP(x)$讀做 "對任一個(或對所有的)$x\in X$而言，$P(x)$都成立"，如果P的真值集是X的話，則此命題為真。

例題 14：若P定義在$\mathbb{Z}$上，且$P(x)=$"$x>5$"，那麼，$\forall xP(x)$就是一個偽命題，因為P的真值集是$\{6,7,8,9,\cdots\}$而不是$\mathbb{Z}$。

例題 15：若Q定義在$\mathbb{R}$上，且$Q(x)=$"$(x+1)^2=x^2+2x+1$"，那麼$\forall x[(x+1)^2=x^2+2x+1]$是一個真命題。

當 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 時，$\forall xP(x)$ 是真命題的充分必要條件是並聯式 $P(x_1)\wedge P(x_2)\wedge\cdots\wedge P(x_n)$ 是真的。同理，$\exists xP(x)$ 是真命題的充分必要條件是選取式 $P(x_1)\vee P(x_2)\vee\cdots\vee P(x_n)$ 為真。

總結以上所述可得下列結果：

1. $\forall xP(x)$為真的情形是命題函數P的真值集為整個定義域；亦即，對每一個$x\in$定義域，$P(x)$都真。
2. $\forall xP(x)$為偽的情形是存在某個x使得$P(x)$為偽，亦即$\exists xP(x)$為F。
3. $\exists xP(x)$為真的情形是命題函數P的真值集非空。亦即，存在$x\in$定義域使得$P(x)$為真。
4. $\exists xP(x)$是偽的情形是對每一個$x\in$定義域，$P(x)$都是偽。

習題

1.下列句子那些是命題？何者是真命題？

(a) π是有理數。

(b) $1101_2=13_{10}$

(c) $2+7=10$

(d) $x+2=10$

(e) 今天天氣好嗎？

(f) 對任意實數x,y都有$x+y=y+x$

2. 用並聯式將下列敘述寫成一個複合命題：(1) 5 是質數；(2) $\dfrac{1}{3}$是有理數。

3. 試製作真值表

(a) $\overline{p}\wedge q$　(b) $p\vee\overline{q}$　(c) $\overline{p}\to q$　(d) $\overline{(p\to q)}$

4. 試判斷下列何者為恆真語句。

(a) $(p\to q)\wedge p\to q$

(b) $(p\to q)\wedge\overline{q}\to\overline{p}$

(c) $(p\to q)\leftrightarrow(\overline{q}\to\overline{p})$

(d) $(p\to q)\wedge\overline{p}\to\overline{q}$

5. 敘述下列命題的否定命題。

(a) 今天是星期五

(b) 阿拉斯加沒有空氣污染問題

(c) $2+1=3$

(d) 台灣的夏天又熱又潮溼

6. 設命題 p:今天氣溫低於零度，q:外面在下雪，試用 p,q 及適當的聯結詞來表達下列敘述。

(a) 今天氣溫低於零度，外面也在下雪。

(b) 今天雖然氣溫低於零度，但是沒有下雪。

(c) 今天的氣溫高於零度，又沒有下雪。

(d) 外面要下雪的充分且必要條件是氣溫要低於零度。

7. 設 p:你得了傷風感冒，q:你沒有認真準備微積分的期中考，r:你的微積分過關了。試用文字敘述下列命題

(a) $p \to q$　(b) $\overline{q} \leftrightarrow r$　(c) $q \to \overline{r}$　(d) $p \vee q \vee r$

8. 利用真值表來證明下列等價性質。

(a) $p \wedge T \Leftrightarrow p$　(b) $p \wedge F \Leftrightarrow F$

9. 利用真值表來證明下列等價性質。

(a) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ 結合律　(b) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

10. 證明下列的吸收律(Absorption Law)

(a) $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$　(b) $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$

11. 證明 $\overline{[p \vee (\overline{p} \wedge q)]}$ 與 $\overline{p} \wedge \overline{q}$ 等價。

12. 令 $P(x)$ 代表"$x \le 4$"。試問下列命題的真偽。

(a) $P(0)$　(b) $P(4)$　(c) $P(10)$

13. 令 $P(x)=$"文字 x 包含英文字母 a"，試問下列命題的真偽。

(a) $P(orange)$　(b) $P(lemon)$　(c) $P(true)$　(d) $P(false)$

14. 設宇集 U 表示一年甲班的學生全體，$P(x)$ 表示 x 每天至少花 3 小時在做功課上 $(x \in U)$。試述下列量詞的意思。

(a) $\exists x P(x)$

(b) $\forall x P(x)$

(c) $\exists x \overline{P(x)}$

(d) $\forall x \overline{P(x)}$

15. 用適當的量詞來描述下列敘述。

(a) 每個資訊系學生都要修微積分。

(b) 班上有人擁有個人電腦。

(c) 班上學生至少都修過一門電腦課。

(d) 班上有人至少修過一門電腦課。

16. 試證狄摩根律

(a) $(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$　(b) $(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$

17. 求命題函數 $P(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的真值集 $T(P)$。

(a) $P(x)=$"$(x=5 \vee x \ge 7)$"

(b) $P(x)=$"$x+1>x$"

(c) $P(x)=$"$x<2$"

(d) $P(x)=$"$\forall x, x^2=1$"

參考資料：

1. C.L. Liu, Elements of Discrete Mathematics, 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1985.
2. K.H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, 5th ed., McGraw-Hill, New York, 2003.
3. 張淑珠，離散數學，第二版，高立圖書。