積分

學習目標

1. 了解不定積分$\int f(x)dx$之意義及求法
2. 能夠利用極限觀念求面積
3. 能夠利用定積分的定義求$\int_a^b f(x)dx$
4. 了解定積分之性質
5. 瞭解為積分基本定理之應用
6. 能夠利用定積分代換定理求定積分
7. 了解積分近似值(數值積分)的求法

(I) 不定積分

定義：

若__________，則稱函數F為函數f的一反導函數(antiderivative function)。

例題：驗證函數$F(x)=\frac{1}{3}x^3+5x+2$是函數$f(x)=x^2+5$的反導函數。

解：

例題：$\frac{d}{dx}(x^3)=$_______，$\frac{d}{dx}(x^3+12)=$_______，$\frac{d}{dx}(x^3-5)=$_______，$\frac{d}{dx}(x^3+\pi)=$_______

註：一個函數的反導函數並不唯一。

定理：

若$F(x)$與$G(x)$為可微分函數，且$F'(x)=G'(x)$對(a,b)中所有x皆成立，則$F(x)-G(x)$在(a,b)上為常數函數，即$F(x)=G(x)+C$，此處C為任意常數。

定義：

若一函數$f(x)$的反導函數$F(x)$為已知，則每一個反導函數皆會形如$F(x)+C$的形式，故$F(x)+C$就代表$f(x)$的所有反導函數，且稱為$f(x)$的不定積分，記作

____

其中$F'(x)=f(x)$，$f(x)$稱為被積分函數，dx稱為積分變數的微分，C稱為不定積分常數。

註：(1) $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=$___________

(2) $\int \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) dx =$ ____________

不定積分的基本函數公式：

1. $\int x^n dx =$ ______________________，$n \neq -1$

1.1. $\int dx =$ ______________________

2. $\int \frac{1}{x} dx =$ ______________________

3. $\int e^x dx =$ ______________________

3.1. $\int e^{kx+b} dx =$ ______________________，$k \neq 0$

例題：求下列各不定積分：

(1) $\int 3dx =$ ______________________

(2) $\int x^{17} dx =$ ______________________

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$ ______________________

(4) $\int e^{-3x} dx =$ ______________________

不定積分的基本性質：

1. ____________________________________，k 為常數

2. ____________________________________

3. ____________________________________

推廣：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

4.＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿，$n \neq -1$，C 為常數

例題：求下列各不定積分：

(1) $\int (2x^5 + 8x^3 - 3x^2 + 5)dx$

解：

(2) $\int \frac{x^3 + 2x - 7}{x} dx$

解：

(3) $\int (3e^{-5t} + \sqrt{t})dt$

解：

不定積分與切線斜率（導數）的關係：

例題：若一曲線 $f(x)$ 在任一點 x 的切線斜率為 $3x^2 + 1$ 且通過點 $(2,6)$，求此函數。

解：

不定積分在經濟理論上的應用

1. 若邊際成本函數為 $MC(x) = \frac{d}{dx}C(x)$，則總成本函數為 $C(x) = \int MC(x)dx$
2. 若邊際收益函數為 $MR(x) = \frac{d}{dx}R(x)$，則總收益函數為 $R(x) = \int MR(x)dx$
3. 若邊際利潤函數為 $MP(x) = \frac{d}{dx}P(x)$，則總利潤函數為 $P(x) = \int MP(x)dx$

例題：設某製造司生產 q 件物品的邊際成本為 $3q^2 - 60q + 400$，若已知生產前 2 件商品的成本為 900 元，試求生產前 5 件時所需之成本。

解：

代換積分法(Integration by Substitution)：

定理：

若 F 為 f 的反導函數，且令 $u=g(x)$ ， $du=g'(x)dx$ ，則

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

例題：試就下列不定積分，選擇適當的變數變換關係：

積分	變數變換關係
(a) $\int (3x+4)^{\frac{5}{2}}dx$	
(b) $\int \frac{4}{3-x}dx$	
(c) $\int xe^{2-x^2}dx$	
(d) $\int x(2+x^2)^3 dx$	

例題：求 $\int \sqrt{2x+7}dx$

解：

例題：求 $\int 8x(4x^2-3)^5 dx$

解：

例題：求 $\int x^3 e^{x^4+2}dx$

解：

例題：求 $\int \frac{x}{x-1}dx$

解：

例題：求$\int \frac{3x+6}{\sqrt{2x^2+8x+3}}dx$

解：

例題：求$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

解：

例題：求$\int e^{5x+2}dx$

解：

例題：求$\int \frac{x^2+3x+5}{x+1}dx$

解：

例題：求$\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx$

解：

例題：求$\int x^4 e^{x^4+2}dx$

解：

例題：假設價格 p（元）與需求量 x（百件）的關係視為 $\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}$，且需求量為 400 件（亦即 $x=4$）時，其售價為 30 元。

(1) 求需求函數 $p(x)$

(2) 需求量為 300 時的售價為何？無需求量的售價又應為何？

(3) 售價為 20 元的需求量為何？

解：

定積分

定積分(definite integral)原先是為計算一塊不規則平面區域之面積，而發展出來的。

預備知識：

級數的符號：

以 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 表 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 共有 n 項之和。

例如：$\sum_{k=1}^{5}(2k-1)=1+3+5+7+9$

例題：寫出下列以$\sum$表出的數，請逐項展開來。

(1) $\sum_{n=1}^{5}\frac{n+1}{n^2}=$ ________________________

(2) $\sum_{n=1}^{10}(-1)^{n+1}\times 2=$ ________________________

例題：下列各數是否表同一數？

(1) $\sum_{k=1}^{4}\frac{k-2}{k+5}=\frac{-1}{6}+\frac{0}{7}+\frac{1}{8}+\frac{2}{9}$

(2) $\sum_{m=3}^{6}\frac{m-4}{m+3}=\frac{-1}{6}+\frac{0}{7}+\frac{1}{8}+\frac{2}{9}$

(3) $\sum_{n=-2}^{1}\frac{n+1}{n+8}=\frac{-1}{6}+\frac{0}{7}+\frac{1}{8}+\frac{2}{9}$

有關$\sum$之性質：

(1) $\sum_{k=1}^{n}c=$ _____，c 為一常數

（2）$\sum_{k=1}^{n}ca_k=$ __________

（3）$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=$ ____________________

（4）$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=$ ____________________

（5）$\sum_{k=1}^{n}a_k=$ ____________________（但 $n>m>1$）

例題：設 $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(2k+3)=a\sum_{k=1}^{n}k^2+b\sum_{k=1}^{n}k+c$，求 a，b，c 之值。

解答：

自然數之乘冪和：

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n =$ ____________________

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 =$ ____________________

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 =$ ____________________

例題：求下列各和：

(1) $1+2+3+4+5 = \sum_{k=1}^{5} k =$ ____________________

(2) $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = \sum_{k=1}^{5} k^2 =$ ____________________

(3) $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 = \sum_{k=1}^{5} k^3 =$ ____________________

考慮下面的面積問題：

已知函數 f 在區間 $[a,b]$ 為連續且非負值，求由 f 的圖形，x 軸與兩直線 $x=a$ 及 $x=b$ 所圍成區域的面積。

解法：

在 a 與 b 之間插入一些點 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$，使得 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ (稱為分割)，而將區間 $[a,b]$ 分割成相同長度 $\dfrac{(b-a)}{n} = \Delta x$ 的 n 個子區間。

通過點 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ 作出垂直線將區域 R 分割成 n 各等寬的長條。我們可以做出在曲線 $y = f(x)$ 下方的內接矩形，亦即

因為 f 在 $[a,b]$ 為連續，故由極值存在定理可知 f 在每一個子區間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ 上有極小值，若這些極小值發生在點 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，則內接矩形的面積為

$$R_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \text{（稱為黎曼和）}$$

若 n 增加時，則矩形的寬會變小，故當較小的矩形會填滿在曲線下方的空隙，R 的正確面積可以定義為 R_n 面積的極限，亦即

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

例題：試求 $f(x) = 2x+1$ 在 $[1,3]$ 上所圍區域的面積。

解：

例題：試求 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上所圍區域的面積。

解：

定義：

若函數 f 在 $[a,b]$ 為連續且非負值，則在 f 的圖形下方由 a 到 b 的面積 A 定義為 $A=\lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$，此處 x_i^* 與 Δx_i 分別為子區間 $[x_{i-1},x_i]$ 中的任一數與長度。

註：為了方便計算，必須做出以下幾個假定

(1) 函數 f 在 $[a,b]$ 為連續

(2) 函數 f 在 $[a,b]$ 為非負值

(3) $[a,b]$ 的子區間長度皆等長

(4) 選取的 c_i 使得 $f(c_i)$ 恆為 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的極小值(或極大值)

更為廣義的定義可為

(1) 函數 f 在 $[a,b]$ 未必連續

(2) 函數 f 在 $[a,b]$ 不一定為非負值

(3) $[a,b]$ 的子區間長度可不同

(4) 選取的 c_i 可以是 $[x_{i-1},x_i]$ 上的任一點

定義：

設 $[a,b]$ 為一閉區間，若實數 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 滿足________________________________，則稱 $P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 為 $[a,b]$ 之一__________，而 Δx_i 表第 i 個子區間的長度，$\|P\|=\max\{\Delta x_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ 稱為分割 P 的_____________。

定義：

設 f 在$[a,b]$中為一連續函數，$P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$為$[a,b]$之任一分割，若存在一實數 L，使得________________，則L稱為 f 由 $x=a$ 至 $x=b$ 的_________，以________表之，亦稱 f 在$[a,b]$可積分，其中a,b分別稱為定積分之下限及上限，$f(x)$稱為被積分函數。

註：若函數$y=f(x)$在區間$[a,b]$為非負函數，則定積分$\int_a^b f(x)dx$在幾何上代表 f 的圖形，x 軸與兩直線$x=a$及$x=b$所圍成區域的面積。

定義：

(1) 若$a>b$，且$\int_b^a f(x)dx$存在，則$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(2) 若 $f(a)$存在，則$\int_a^a f(x)dx=0$

例題：計算$\int_1^4 x^2dx$。

解：

定理：

若 f 在$[a,b]$為連續，則 f 在$[a,b]$為可積分。

例題：定積分$\int_0^4 [\![x]\!] dx$存在，但最大整數函數 $f(x)=[\![x]\!]$在$[0,4]$中不連續。

解：

定理：

若函數 f 在$[a,b]$為有界，且在$[a,b]$中僅有有限個不連續點，則 f 在$[a,b]$為可積分。

定積分的性質

定理：

若函數 f 在$[a,b]$為可積分，且c為常數，則cf 在$[a,b]$為可積分，且

____

定理：

若兩函數 f 與 g 在$[a,b]$皆為可積分，則 $f+g$ 與 $f-g$ 在$[a,b]$為可積分，且

____

____

註：若函數 $f_1, f_2,\cdots, f_n$ 在$[a,b]$皆為可積分，且$c_1,c_2,\cdots,c_n$皆為常數，則$c_1 f_1+c_2 f_2+\cdots+c_n f_n$在$[a,b]$為可積分，且

____

定理：

若函數 f 在含有任意三數a,b與c的閉區間為可積分，則

____

不論a,b及c的次序為何。

例題：假設函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在區間$[-2,5]$為連續，且$\int_{-2}^5 f(x)dx=3$，$\int_{-2}^5 g(x)dx=-4$，$\int_3^5 f(x)dx=7$，求

(1) $\int_{-2}^5 [2f(x)-3g(x)]dx$

解：

(2) $\int_{-2}^{3} f(x)dx$

解：

定理：

若函數 f 在 $[a,b]$ 為可積分，且 $f(x)\geq 0$ 對於 $[a,b]$ 中的所有 x 皆成立，則 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

定理：

若兩函數 f 與 g 在 $[a,b]$ 皆為可積分，且 $f(x)\geq g(x)$ 對於 $[a,b]$ 中的所有 x 皆成立，則 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

定理：

若函數 f 在 $[a,b]$ 為可積分，且 m 與 M 分別為 f 在 $[a,b]$ 上的絕對極小值與絕對極大值，則

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

例題：試證：$\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x}dx \leq 1$。

解：

定理(積分均值定理)：

若函數 f 在 $[a,b]$ 為連續，則在 $[a,b]$ 中存在一數 c，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

例題：已知 $f(x)=x^2$，試求一數 c 使得 $\int_1^4 f(x)dx = f(c)(4-1)$ 成立。

解：

微積分基本定理(Fundamental Theorem of Calculus)

定理：

設函數 f 在 $[a,b]$ 為連續。

(1) 若令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ ，$x\in[a,b]$ ，則______________________。

(2) 若 $F'(x)=f(x)$ ，$x\in[a,b]$ ，則___________________________。

通常運算過程會寫成如下表示：________________________________。

例題：利用微積分基本定理，求 $f(x)=2x+1$ 在 $[1,3]$ 上所圍區域的面積。

例題：假設一塊土地是由 $y=x^3+1$ 在 $[0,1]$ 上所圍區域，其中 x,y 均是以百英尺記。若這土地每英尺的的售價為 12 元，求這土地的價值為何？

解：

例題：求 $\int_0^1\left(e^{-x}+\sqrt{x}\right)dx$

解：

例題：求 $\int_1^4\left(\frac{1}{x}-x^2\right)dx$

解：

例題：求$\int_1^4 \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}dx$

解：

例題：若 $f(x)=2x-x^2$，計算$\int_{-1}^{1}\left|f(x)\right|dx$

解：

例題：若 $f(x)=\begin{cases}1 & \text{，若}0\le x<1\\ x & \text{，若}1\le x<2\\ 4-x & \text{，若}2\le x\le 4\end{cases}$；求$\int_0^4 f(x)dx$

解：

例題：一製造商之邊際成本函數為$\frac{dC}{dx}=0.6x+2$。若現在每週之生產量定在$x=80$單位。當每週之生產增至 100 單位時，則成本會增加多少？

解：

代換積分法

定理：

設函數 g 在 $[a,b]$ 具有連續的導函數，且 f 在 $g(a)$ 至 $g(b)$ 為連續。令 $u=g(x)$，則

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

例題：求 $\int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx$

解：

例題：求 $\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{\ln x}{x} dx$

解：

例題：一製造商之邊際成本函數為 $\frac{dC}{dq}=3(q-4)^2$。若現在每週之生產量定在 $q=6$ 單位。當每週之生產增至 10 單位時，則成本會增加多少？

解：

積分近似值的求法

(A) 梯形法：

定理：

若函數 f 在 $[a,b]$ 為連續，且 $a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n=b$，將 $[a,b]$ 作一正則分割，則

____

例題：利用梯形法及 $n=10$，計算 $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ 的近似值。

解：

(B) 辛普森法：

定理：

若函數 f 在 $[a,b]$ 為連續，n 為正偶數，且 $a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n=b$，將 $[a,b]$ 作一正則分割，則

例題：利用辛普森法及 $n=10$，計算 $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ 的近似值。

解：