

指數函數與對數函數的導函數

學習目標

- 了解指數函數與對數函數之意義及其極限
- 能熟記對數函數之微分公式
- 能熟記指數函數之微分公式
- 了解複利之計算

I. 指數函數與對數函數

對於每一個實數 a ，我們以記號 a^n 代表 a 自乘 n 次的乘積亦即

例如： $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

註：此時 a^n 稱為指數式(Exponent)，其中 a 稱為底數(Base)， n 稱為指數(Index)。

根據以上的定義，我們可以得到一些指數相關的性質，稱為指數律；

假設 a, b 為實數， n, m 為正整數，則

(1) _____，例如： $3^2 \times 3^5 =$ _____

(2) _____，例如： $\frac{3^5}{3^2} =$ _____

(3) _____，例如： $(3^2)^5 =$ _____

(4) _____，例如： $2^5 3^5 =$ _____

(5) _____，例如： $\frac{2^5}{3^5} =$ _____

以上的討論，均是針對於指數為正整數時：現在我們是希望可以將指數為正整數的限制放寬為實數，但是又必須滿足所有的指數律。是故，以下將重新定義非正整數的指數：

(1) 若指數為 0，則定義 _____，但是 _____。

(2) 若指數為負整數，則定義 _____，但是 _____。

(3) 若指數為分數，則定義 _____；但是若 m 為偶數，則 a^n 必須為非負實數，因此，不要有任何爭議的情況產生，所以，我們將限制 a 為非負實數。

(4) 若指數為非有理數，因超過所學範圍，在此不宜討論；但是指數為非有理數時，亦符合指數律。

因此，對於任何實數的指數均可重新定義如上，同時也可以知道，有些必須加以設限，所以，我們一般化指數形成指數函數，定義如下：

定義：

若_____，且_____，則函數

稱為以 a 為底數且 x 為指數的指數函數(exponential function)

指數函數的特性：

(1) 定義域為_____，值域為_____

(2) 指數函數為_____函數，亦即，_____，且在 \mathbb{R} 上為_____

(3) 指數函數的圖形必通過_____

(4) 若_____，則指數函數在 \mathbb{R} 上為_____函數，且若_____，則指數函數在 \mathbb{R} 上為_____函數

(5) 兩指數函數 $y = a^x$ 與 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的圖形皆對稱於 y 軸

(6) 當 $a > 1$ 時，_____，_____ (亦即， x 軸為水平漸近線)；

當 $0 < a < 1$ 時，_____，_____ (亦即， x 軸為水平漸近線)

例題：分別繪函數 $y = 2^x$ 與 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形

解：

定理：(指數律)

設 $a, b > 0$ 且 $x, y \in \mathbb{R}$ ，則

(1) _____

(2) _____

(3) _____

(4) _____

例題：計算下列各式：

(a) $(3)^2(3)^3 =$ _____

(b) $(2^3)^2 =$ _____

(c) $(5^{\frac{1}{3}})(2^{\frac{1}{3}}) =$ _____

(d) $\frac{2^3}{2^5} =$ _____

(e) $\left(\frac{4}{7}\right)^3 =$ _____

例題：假設 $f(x) = 5^{x^2+2x}$ ，若 $f(x) = 125$ ，則 x 之值為何？

解答：

例題：求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10^x}{10^x + 1}$

解答：

例題：求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{2^x}$

解答：

定義：(自然數或納比爾數)

_____ 或 _____

註： $e \approx$ _____

例題：求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n}$

解答：

定義：

以無理數 e 為底數的指數函數 $y = e^x$ 稱為自然指數函數。

自然指數函數的特性：

(1) 定義域為 _____，值域為 _____

(2) 為 _____ 函數，且在 \mathbb{R} 上為 _____

(3) 圖形必通過 _____

(4) 在 \mathbb{R} 上為 _____ 函數

(5) 兩指數函數 $y = e^x$ 與 $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$ 的圖形皆對稱於 y 軸

(6) _____，_____ (亦即， x 軸為水平漸近線)

定理：

(1) _____

(2) _____

(3) _____

應用：連續複利(Continuous Compounding of Interest)：

假設本金(initial investment, principal，有時亦稱為現值，Present value)為 P ，每期利率為 r ，則在第 n 期末之複利終值(Balance, future value)為

若每年複利 k 次，則在第 t 期末之複利終值(Balance, future value)為

若複利次數無窮增加，亦即每一期複利無窮次($k \rightarrow \infty$)，則此種複利之方法稱為連續複利，可得

例題：如果投資 1000 元，年利率為 6%，按照下列方式複利，試求 10 年後的複利終值。

- a. 每季複利 b. 每月複利 c. 每日複利 d. 連續複利

解答：(a)

(b)

(c)

(d)

例題：蘇同學進入大學後，希望在四年後畢業，然後到歐洲旅行。他預計的旅費需要花費 5000 元，若年利率為 7%，則他現在需要存多少錢，才可以達成願望。

- a. 每季複利 b. 連續複利

解答：(a)

(b)

定義：

y 稱為以 a 為底的對數函數

對數函數的特性：

(1) 定義域為_____，值域為_____

(2) 對數函數的圖形必通過_____

(3) 對數函數為_____函數，亦即，_____，且在 $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ 上為_____

(4) 若 $a > 1$ ，則對數函數在 $(0, \infty)$ 上為_____函數，且若 $0 < a < 1$ ，則對數數函數在 $(0, \infty)$

上為_____函數

(5) 兩對數函數 $y = \log_a x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形皆對稱於 x 軸

(6) 當 $a > 1$ 時，_____ (亦即， y 軸為垂直漸近線)，_____；

當 $0 < a < 1$ 時，_____ (亦即， y 軸為垂直漸近線)，_____

對數的基本運算公式：

設 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， $x > 0$ ， $y > 0$ ，則

(1) _____

(2) _____

(3) _____

(4) _____

(5) _____ ($r \in \mathbb{R}$)

例題：計算下列各式：

(a) $\log_{10} 1000 =$ _____

(b) $\log_2 32 =$ _____

$$(c) \log_5 \left(\frac{1}{125} \right) = \underline{\hspace{4cm}}$$

例題：試解下列各方程式之根：

$$(a) \log_4 x = \frac{1}{2} \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(b) \log_{64} 16 = x \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(c) \log_x 27 = 3 \underline{\hspace{4cm}}$$

例題：利用對數運算法則，將下列對數轉換成 $\log_5 2$ 與 $\log_5 3$ 有關係的式子：

$$(a) \log_5 \left(\frac{5}{3} \right) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(b) \log_5 8 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(c) \log_5 36 = \underline{\hspace{4cm}}$$

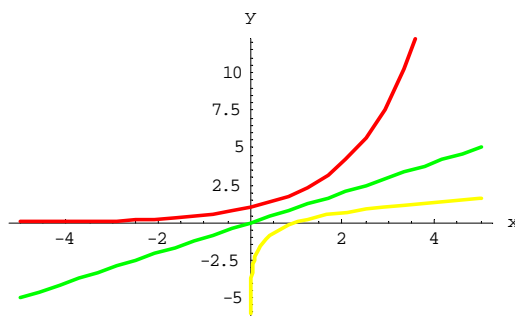
例題：利用對數運算法則，將下列對數展開：

$$(a) \log_3 (x^3 y^{-4}) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(b) \log_2 \left(\frac{y^5}{x^2} \right) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(c) \log_7 (x^3 \sqrt{1-y^2}) = \underline{\hspace{4cm}}$$

性質：指數函數 $y = a^x$ 與對數函數 $y = \log_a x$ 的圖形對稱於直線 $y = x$ 。



定義：

以無理數 e 為底數的對數函數 $y = \ln x$ 稱為自然對數函數。

定理：

(1) _____

(2) _____

定理：

設 $x > 0$ 且 $y > 0$ ，則

(1) _____

(2) _____

(3) _____

例題：計算下列各式

(a) $\ln e =$ _____

(b) $\ln 1 =$ _____

(c) $\ln \sqrt{e} =$ _____

(d) $\ln 2 =$ _____

例題：

(a) 若 $\ln a = 3$ 且 $\ln b = 7$ ，試求 $\ln \sqrt{ab}$ 。

解答：

(b) 證明 $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

解答：

(c) 試解方程式 $2^x = e^3$

解答：

定理：

(1) _____ 且 _____， $\forall x > 0$

(2) _____ 且 _____， $\forall x \in \mathbb{R}$

例題：求解下列方程式：

(a) $3 = e^{20x}$

解答：

(b) $2 \ln x = 1$

解答：

定理：(換底公式)

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， $b > 0$ ， $b \neq 1$ ， $c > 0$ ，則_____

例題：試求 $\log_5 3.172$

解答：

例題：某人將 1000 元存入銀行，年利率為 8%，採用連續複利計算，請問多久後金額變成本金的兩倍。

解答：

例題：根據公式 $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$ ，驗證一放射性物質的半衰期為 $h = \frac{\ln 2}{k}$ 。

解答：

例題：一考古學家發現一化石(fossil)的 ^{14}C 與 ^{12}C 的比例為 $\frac{1}{5}$ ，試求此化石的年齡？(已知碳 14 的半衰期為 5730 年)

解答：

例題：假設某一城市，以市中心為圓心，以 x 哩為半徑之圓內的人口密度函數(population density)為 $Q(x) = Ae^{-kx}$ 。若市中心的人口密度為每平方哩有 15000 人且在 10 哩內的人口密度為每平方哩有 9000 人，試決定此一人口密度函數。

解答：

II. 對數函數的導函數

定理：

例題：求 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x+1) - \ln x)$

解答：

定理：(對數函數的導函數)

, $x > 0$

例題：假設 $f(x) = x \ln x$ ，試求 $f'(x)$ 。

解答：

例題：假設 $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x^2}}{x^4}$ ，試求 $f'(x)$ 。

解答：

例題：假設 $g(t) = (t + \ln t)^{\frac{3}{2}}$ ，試求 $g'(t)$ 。

解答：

定理：

若 $u = u(x)$ 為可微分函數，則

例題：假設 $f(x) = \ln(2x^3 + 1)$ ，試求 $f'(x)$ 。

解答：

例題：試求通過在 $x=1$ 處之點且與圖形 $f(x) = x - \ln \sqrt{x}$ 相切的切線方程式。

解答：

例題：一製造商販售 x 件商品的單位售價為 $p(x) = 112 - x \ln x^3$ 百元。

(a) 試求收益函數以及邊際收益函數。

(b) 試求販售第五件商品時之邊際收益以及確實收益值

解答：

定理：

定理：

若 $u = u(x)$ 為可微分函數，則

例題：假設 $y = \log_3 x$ ，求 $\frac{dy}{dx}$

解答：

III. 指數函數的導函數

定理：(指數函數的導函數)

例題：求曲線 $2e^{xy} = x + y$ 在點 $(0, 2)$ 之切線方程式。

解答：

例題：若 $xe^y + 2x - \ln y = 4$ ，求 $\frac{dy}{dx}$

解答：

定理：

若 $u = u(x)$ 為可微分函數，則

例題：假設 $f(x) = e^{x^2+1}$ ，試求 $f'(x)$ 。

解答：

例題：假設 $f(x) = \frac{e^{-3x}}{x^2+1}$ ，試求 $f'(x)$ 。

解答：

例題：試求函數 $f(x) = xe^{2x}$ 在區間 $-1 \leq x \leq 1$ 處的最大值與最小值。

解答：

例題：假設某商品之價格 p 與需求量之關係為 $D(p) = 5000e^{-0.02p}$ 。

- (a) 對什麼樣的價格 p ，需求是富於彈性？不富於彈性？單一彈性。
- (b) 假設價格從 40 元增加 3%，對需求的影響如何？
- (c) 試求使總收益最大時之價格 p 。

解答：

例題：假設 $y = 2^x$ ，試求 $f'(x)$ 。

解答：

IV. 對數型微分

對函數 $y = f(x)$ 微分，其中 f 具有大量的相乘、相除、次方等等，則可以依據下列步驟計算之：

(1) 將 $y = f(x)$ 兩邊取自然對數，即， $\ln y = \ln f(x)$

(2) 將 $\ln y = \ln f(x)$ 兩邊微分，即， $\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} \ln f(x)$

(3) 透過基本微分技巧以及連鎖率，可得 $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \ln f(x)$

(4) 最後可以獲得， $\frac{dy}{dx} = f(x) \frac{d}{dx} \ln f(x)$

例題：假設 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}$ ，試求 $f'(x)$ 。

解答：

例題：設 $y = x(x-1)(x^2+1)^3$ ，求 $\frac{dy}{dx}$

解答：

例題：若 $y = x^x$ ， $x > 0$ ，求 $\frac{dy}{dx}$

解答：

例題：繪函數 $f(x) = x^2 - 8 \ln x$ 的圖形。

解答：

VII. 常態分配(Normal Distribution)：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty : \text{標準常態分配(standard normal distribution)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

例題：試繪函數 $f(x) = e^{-x^2}$ 的圖形。

解答：