指數函數與對數函數的導函數

學習目標

- 了解指數函數與對數函數之意義及其極限
- 能熟記對數函數之微分公式
- 能熟記指數函數之微分公式
- 了解指數的成長率及衰變率
- 了解複利之計算

I. 指數函數與對數函數

對於每一個實數 a ，我們以記號 a^n 代表 a 自乘 n 次的乘積亦即

____

例如：$3\times3\times3\times3\times3=3^5$

註：此時 a^n 稱為指數式(Exponent)，其中 a 稱為底數(Base)，n 稱為指數(Index)。

根據以上的定義，我們可以得到一些指數相關的性質，稱為指數律；

假設 a,b 為實數，n,m 為正整數，則

(1) ____________________，例如：$3^2\times3^5=$__________

(2) ____________________，例如：$\dfrac{3^5}{3^2}=$__________

(3) ____________________，例如：$\left(3^2\right)^5=$__________

(4) ____________________，例如：$2^5 3^5=$__________

(5) ____________________，例如：$\dfrac{2^5}{3^5}=$__________

以上的討論，均是針對於指數為正整數時：現在我們是希望可以將指數為正整數的限制放寬為實數，但是又必須滿足所有的指數律。是故，以下將重新定義非正整數的指數：

(1) 若指數為 0 ，則定義__________，但是__________。

(2) 若指數為負整數，則定義__________，但是__________。

(3) 若指數為分數，則定義__________；但是若 m 為偶數，則 a^n 必須為非負實數，因此，不要有任何爭議的情況產生，所以，我們將限制 a 為非負實數。

(4) 若指數為非有理數，則需透過極限來加以定義，亦即，若 r 為一非有理數，則我們可以定義一個無窮數列$\{r_n\}$，使得 $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ ，故 $a^r = a^{\lim_{n\to\infty} r_n} = \lim_{n\to} a^{r_n}$

因此，對於任何實數的指數均可重新定義如上，同時也可以知道，有些必須加以設限，所以，我們一般化指數形成指數函數，定義如下：

定義：

若________，且_________，則函數

____

稱為以 a 為底數且 x 為指數的指數函數(exponential function)

指數函數的特性：

(1) 定義域為______ ，值域為________________

(2) 指數函數為____________函數，亦即，__________________ ，且在 $\mathbb{R}$ 上為______

(3) 指數函數的圖形必通過______

(4) 若______ ，則指數函數在 $\mathbb{R}$ 上為________函數，且若__________ ，則指數函數在 $\mathbb{R}$ 上為________函數

(5) 兩指數函數 $y = a^x$ 與 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的圖形皆對稱於 y 軸

(6) 當 $a > 1$ 時，________________ ，________________ (亦即，x 軸為水平漸近線)；

當 $0 < a < 1$ 時，________________ ，________________ (亦即，x 軸為水平漸近線)

例題：分別繪函數 $y = 2^x$ 與 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形

解：

定理：(指數律)

設 $a,b>0$ 且 $x,y\in\mathbb{R}$ ，則

(1) ________________

(2) ________________

(3) ________________

(4) ________________

例題：計算下列各式：

(a) $(3)^2(3)^3=$ ________________

(b) $(2^3)^2=$ ________________

(c) $(5^{\frac{1}{3}})(2^{\frac{1}{3}})=$ ________________

(d) $\dfrac{2^3}{2^5}=$ ________________

(e) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^3=$ ________________

例題：假設 $f(x)=5^{x^2+2x}$ ，若 $f(x)=125$，則 x 之值為何？

解答：

例題：求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10^x}{10^x+1}$

解答：

例題：求$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{2^x}$

解答：

定義：(自然數或納比爾數)

____________________ 或____________________

註：$e\approx$____________________

例題：求$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n}$

解答：

例題：求$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

解答：

定義：

以無理數e為底數的指數函數$y=e^x$稱為自然指數函數。

自然指數函數的特性：

(1) 定義域為______，值域為__________

(2) 為__________函數，且在$\mathbb{R}$上為______

(3) 圖形必通過______

(4) 在$\mathbb{R}$上為______函數

(5) 兩指數函數$y=e^x$與$y=\left(\frac{1}{e}\right)^x=e^{-x}$的圖形皆對稱於$y$軸

(6) ________________，________________(亦即，x軸為水平漸近線)

定理：

(1) ___________________

(2) ___________________

(3) ___________________

應用 1：連續複利(Continuous Compounding of Interest)：

假設本金(initial investment, principal，有時亦稱為現值，Present value)為 P ，每期利率為 r ，則在第 n 期末之複利終值(Balance，future value)為

____

若每年複利 k 次，則在第 t 期末之複利終值(Balance，future value)為

____

若複利次數無窮增加，亦即每一期複利無窮次($k \to \infty$)，則此種複利之方法稱為連續複利，可得

____

例題：如果投資 1000 元，年利率為 6%，按照下列方式複利，試求 10 年後的複利終值。
a. 每季複利　　b. 每月複利　　c. 每日複利　　d. 連續複利

解答：(a)

(b)

(c)

(d)

例題：蘇同學進入大學後，希望在四年後畢業，然後到歐洲旅行。他預計的旅費需要花費 5000 元，若年利率為 7%，則他現在需要存多少錢，才可以達成願望。

a. 每季複利　　　　b. 連續複利

解答：(a)

(b)

應用 2：指數的成長率與衰變率

定理：

設某數量 y 為 t 的函數，且其變化率(對於時間)與當時的數量成正比，即 $\frac{dy}{dt} \propto y$。設比例常數為 k，則

____

(若 y 隨 t 增加而增加，則 $k > 0$，稱為指數的成長(Exponential Growth)；否則 $k < 0$，稱為指數的衰變(Exponential Decay))此一方程式稱為微分方程式，其解為

____

其中 y_0 表 $t = 0$ 時之數量。當 $k > 0$ 時，k 稱為成長常數；當 $k < 0$ 時，k 稱為衰變常數。

例題：某病人服用藥物後，經過 t 小時後病人血液的藥物濃度為 $C(t) = 3.97e^{-09t}$ (mg/ml)。試求病人在第二小時的藥物濃度的改變率。

解答：

例題：在某一適合細菌繁殖的環境中，中午 12 點時，細菌數估計約為 2000，20 分鐘後約為 6000，試問 1 個小時後細菌總數為多少？

解答：

定義：

____

　　y 稱為以 a 為底的對數函數

對數函數的特性：

(1) 定義域為______，值域為______

(2) 對數函數的圖形必通過______

(3) 對數函數為______函數，亦即，______________________，且在 $\mathbb{R}^{+}=(0,\infty)$ 上為____

(4) 若 $a>1$，則對數函數在 $(0,\infty)$ 上為______函數，且若 $0<a<1$，則對數數函數在 $=(0,\infty)$

上為______函數

(5) 兩對數函數 $y=\log_a x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形皆對稱於 x 軸

(6) 當 $a>1$ 時，__________________ (亦即，y 軸為垂直漸近線)，__________________；

當 $0<a<1$ 時，__________________ (亦即，y 軸為垂直漸近線)，________________

對數的基本運算公式：

　　設 $a>0$，$a\neq 1$，$x>0$，$y>0$，則

(1) __________________

(2) __________________

(3) __________________

(4) __________________

(5) __________________ ($r\in\mathbb{R}$)

例題：計算下列各式：

(a) $\log_{10}1000=$__________________

(b) $\log_2 32=$________________________

(c) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)=$ ____________________

例題：試解下列各方程式之根：

(a) $\log_4 x=\frac{1}{2}$ ____

(b) $\log_{64}16=x$ ____

(c) $\log_x 27=3$ ____

例題：利用對數運算法則，將下列對數轉換成 $\log_5 2$ 與 $\log_5 3$ 有關係的式子：.

(a) $\log_5\left(\frac{5}{3}\right)=$ _______________

(b) $\log_5 8=$ _______________

(c) $\log_5 36=$ _______________

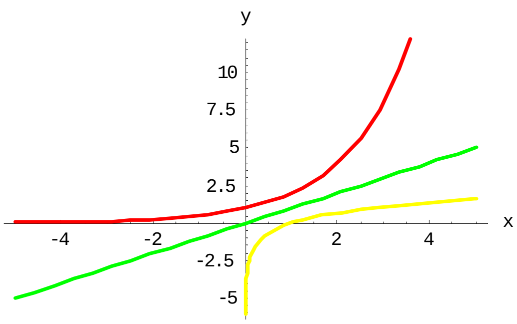
例題：利用對數運算法則，將下列對數展開：

(a) $\log_3(x^3y^{-4})=$ _________________________

(b) $\log_2\left(\frac{y^5}{x^2}\right)=$ _________________________

(c) $\log_7(x^3\sqrt{1-y^2})=$ _________________________

性質：指數函數 $y=a^x$ 與對數函數 $y=\log_a x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$ 。



定義：

以無理數 e 為底數的對數函數 $y=\ln x$ 稱為自然對數函數。

定理：

(1) ____________________

(2) ____________________

定理：

設 $x>0$ 且 $y>0$，則

(1)____________________

(2)____________________

(3)____________________

例題：計算下列各式

(a) $\ln e=$____________

(b) $\ln 1=$____________

(c) $\ln\sqrt{e}=$____________

(d) $\ln 2=$____________

例題：

(a) 若 $\ln a=3$ 且 $\ln b=7$，試求 $\ln\sqrt{ab}$。

解答：

(b) 證明 $\ln\frac{1}{x}=-\ln x$

解答：

(c) 試解方程式 $2^x=e^3$

解答：

定理：

(1)____________且____________，$\forall x>0$

(2)____________且____________，$\forall x\in\mathbb{R}$

例題：求解下列方程式：

(a) $3 = e^{20x}$

解答：

(b) $2\ln x = 1$

解答：

定理：(換底公式)

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，$b > 0$，$b \neq 1$，$c > 0$，則__________________

例題：試求 $\log_5 3.172$

解答：

例題：某人將 1000 元存入銀行，年利率為 8%，採用連續複利計算，請問多久後金額變成本金的兩倍。

解答：

例題：根據公式 $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$，驗證一放射性物質的半衰期為 $h = \dfrac{\ln 2}{k}$。

解答：

例題：一考古學家發現一化石(fossil)的 $^{14}\mathrm{C}$ 與 $^{12}\mathrm{C}$ 的比例為 $\dfrac{1}{5}$，試求此化石的年齡？(已知碳 14 的半衰期為 5730 年)

解答：

例題：假設某一城市，以市中心為圓心，以 x 哩為半徑之圓內的人口密度函數(population density)為 $Q(x) = Ae^{-kx}$。若市中心的人口密度為每平方哩有 15000 人且在 10 哩內的人口密度為每平方哩有 9000 人，試決定此一人口密度函數。

解答：

II. 對數函數的導函數

定理：

例題：求 $\lim_{x\to\infty}\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$

解答：

定理：(對數函數的導函數)

，$x>0$

例題：假設 $f(x)=x\ln x$ ，試求 $f'(x)$ 。

解答：

例題：假設 $f(x)=\dfrac{\ln\sqrt[3]{x^2}}{x^4}$ ，試求 $f'(x)$ 。

解答：

例題：假設 $g(t)=(t+\ln t)^{\frac{3}{2}}$ ，試求 $g'(t)$ 。

解答：

定理：

若 $u=u(x)$ 為可微分函數，則

例題：假設 $f(x)=\ln(2x^3+1)$ ，試求 $f'(x)$ 。

解答：

例題：試求通過在 $x=1$ 處之點且與圖形 $f(x)=x-\ln\sqrt{x}$ 相切的切線方程式。

解答：

例題：一製造商販售 x 件商品的單位售價為 $p(x)=112-x\ln x^3$ 百元。

(a) 試求收益函數以及邊際收益函數。

(b) 試求販售第五件商品時之邊際收益以及確實收益值

解答：

定理：

定理：

若 $u=u(x)$ 為可微分函數，則

例題：假設 $y=\log_3 x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

解答：

III. 指數函數的導函數

定理：(指數函數的導函數)

例題：求曲線 $2e^{xy}=x+y$ 在點 $(0,2)$ 之切線方程式。

解答：

例題：若 $xe^{y}+2x-\ln y=4$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

解答：

定理：

若 $u=u(x)$ 為可微分函數，則

例題：假設 $f(x)=e^{x^2+1}$，試求 $f'(x)$。

解答：

例題：假設 $f(x)=\dfrac{e^{-3x}}{x^2+1}$，試求 $f'(x)$。

解答：

例題：試求函數 $f(x)=xe^{2x}$ 在區間 $-1\le x\le 1$ 處的最大值與最小值。

解答：

例題：假設某商品之價格 p 與需求量之關係為 $D(p)=5000e^{-0.02p}$ 。

(a) 對什麼樣的價格 p ，需求是富於彈性？不富於彈性？單一彈性。

(b) 假設價格從 40 元增加 3%，對需求的影響如何？

(c) 試求使總收益最大時之價格 p 。

解答：

例題：假設 $y=2^x$ ，試求 $f'(x)$ 。

解答：

IV. 對數型微分

對函數 $y=f(x)$ 微分，其中 f 具有大量的相乘、相除、次方等等，則可以依據下列步驟計算之：

(1) 將 $y=f(x)$ 兩邊取自然對數，即，$\ln y=\ln f(x)$

(2) 將 $\ln y=\ln f(x)$ 兩邊微分，即，$\dfrac{d}{dx}\ln y=\dfrac{d}{dx}\ln f(x)$

(3) 透過基本微分技巧以及連鎖率，可得 $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\ln f(x)$

(4) 最後可以獲得，$\dfrac{dy}{dx}=f(x)\dfrac{d}{dx}\ln f(x)$

例題：假設 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}$ ，試求 $f'(x)$ 。

解答：

例題：設 $y=x(x-1)(x^2+1)^3$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$

解答：

例題：若 $y=x^x$ ， $x>0$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$

解答：

例題：繪函數 $f(x)=x^2-8\ln x$ 的圖形。

解答：

VII. 常態分配(Normal Distribution)：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\text{ ，}-\infty<x<\infty$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\text{ ，}-\infty<x<\infty$$ ：標準常態分配(standard normal distribution)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\text{ ，}-\infty<x<\infty$$

例題：試繪函數 $f(x)=e^{-x^2}$ 的圖形。

解答：