

## Z 轉換基本運算

南台科大 趙春棠

### \* Z 多項式相乘

**Case1:** 起始點均為 0，故使用 `conv` 即可

例：  $X1(z)=2+3z^{-1}+4z^{-2}$ ;  $X2(z)=3+4z^{-1}+5z^{-2}+6z^{-3}$ ; 求  $X3(z)=X1(z)*X2(z)$

**Matlab:** `x1 = [2,3,4]; x2 = [3,4,5,6]; x3 = conv(x1,x2)`

`x3 = 6 17 34 43 38 24`

此表示  $X3(z)=6+17z^{-1}+34z^{-2}+43z^{-3}+38z^{-4}+24z^{-5}$

**Case2:** 起始點不定為 0，故使用 `conv_m` 即可

例：  $X1(z)=2z+3+4z^{-1}$ ;  $X2(z)=3z^2+4z^1+5+6z^{-1}$ ; 求  $X3(z)=X1(z)*X2(z)$

**Matlab:** `x1 = [2,3,4]; n1 = -1:1; x2 = [3,4,5,6]; n2 = -2:1; [x3,n3] = conv_m(x1,n1,x2,n2)`

`x3 = 6 17 34 43 38 24`

`n3 = -3 -2 -1 0 1 2`

此表示  $X3(z)=6z^3+17z^2+34z^1+43+38z^{-1}+24z^{-2}$

### \* 由 $H(z)$ 得 $x(n)$

例：  $H(z)=z^{-2}/(z^2-0.7z^{-3})$

**Matlab:** `b=[0 0 1]; a=[0 0 1 -0.7]; [delta,n]=impzseq(0,0,7); x=filter(b,a,delta);`

??? Error using ==> filter

First denominator filter coefficient must be non-zero.

例：  $H(z)=1/(1-0.7z^{-1})$  (想像  $H(z)=Y(z)/X(z)$ ，當  $X(z)$  為脈衝時，輸出為  $H(z)$ )

**Matlab:** `b=[1]; a=[1 -0.7]; [delta,n]=impzseq(0,0,7); x=filter(b,a,delta);`

`x = 1.0000 0.7000 0.4900 0.3430 0.2401 0.1681 0.1176 0.0824`

註：與前述  $y(n)-0.7y(n-1)=x(n)$  差分表示相同

### \* $H(z)$ 的分解

例：  $X(z)=\frac{1}{(1-0.9z^{-1})^2(1+0.9z^{-1})}$ ,  $|z|>0.9$

**Matlab:** `b = 1; a = poly([0.9,0.9,-0.9]); [R,p,C]=residuez(b,a)`

`R = 0.2500 + 0.0000i`

`0.5000 - 0.0000i`

`0.2500`

`p = 0.9000 + 0.0000i`

`0.9000 - 0.0000i`

`-0.9000`

`C = []`

結論：  $X(z)=\frac{0.25}{1-0.9z^{-1}}+\frac{0.5}{(1-0.9z^{-1})^2}+\frac{0.25}{1+0.9z^{-1}}$ ,  $|z|>0.9$

註：a=poly([2 -3])

a = 1 1 -6 Note: (x-2)\*(x+3)= x<sup>2</sup>+x-6

\* 由 H(z) 畫頻譜

例：  $H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}}$

Matlab: b=[1]; a=[1 -0.9]; w=-2\*pi/pi/100:2\*pi; %取 401 點

**H=freqz(b,a,w);**

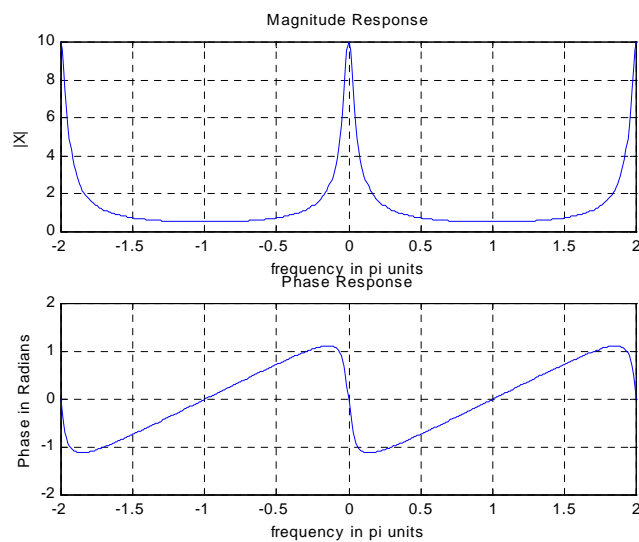
magH = abs(H); angH = angle(H);

subplot(2,1,1); plot(w/pi,magH);grid

xlabel('frequency in pi units'); ylabel('|X|');title('Magnitude Response')

subplot(2,1,2); plot(w/pi,angH);grid

xlabel('frequency in pi units'); ylabel('Phase in Radians');title('Phase Response');

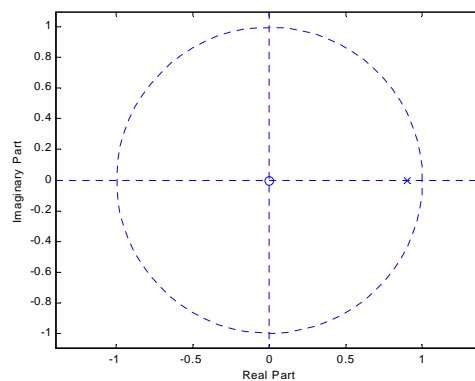


註： [H,w]=freqz(b,a,N); % w: 等分單位圓 ”上半部” N 點所得

[H,w]=freqz(b,a,N,'whole'); % w: 等分 “整個” 單位圓 N 點所得

\* 由 H(z) 畫極點、零點圖

b=[1]; a=[1 -0.9]; zplane(b,a);



## H(z)含初始條件之解

例一：差分方程式： $y(n)-1.5y(n-1)+0.5y(n-2)=x(n)$ ,  $n \geq 0$       $x(n)=(0.25)^n u(n)$

初始條件： $y(-1)=4$ ;  $y(-2)=10$

Step1: 先求 xic

$$\text{筆算： } Y^+(z) = \frac{X(z)}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}} + \frac{1-2z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

$$\text{xic} = [1 \ -2]$$

Matlab :  $b=[1]$ ;

$a=[1 \ -1.5 \ 0.5]$ ;  $Y0=[4 \ 10]$ ;  $X0=[]$ ;

$\text{xic}=\text{filtic}(b,a,Y0,X0)$

得  $\text{xic} = 1 \quad -2$

Step2: 利用 filter 指令求輸出

Matlab:  $b=[1]$ ;  $a=[1 \ -1.5 \ 0.5]$ ;  $n=[0:10]$ ;  $x=(0.25).^n$ ;  $\text{xic}=[1 \ -2]$ ;  $y=\text{filter}(b,a,x,\text{xic})$ ;

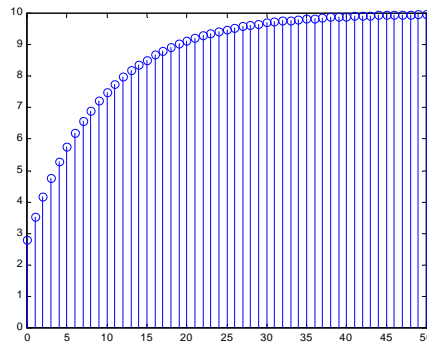
$y = 2.0000 \ 1.2500 \ 0.9375 \ 0.7969 \ 0.7305 \ 0.6982 \ 0.6824 \ 0.6745 \ 0.6706 \ 0.6686$   
 $0.6676$

例二：差分方程式： $y(n)-0.9y(n-1)=x(n)$ ,  $n \geq 0$       $x(n)=u(n)$

初始條件： $y(-1)=2$ ;

Matlab:  $b=[1]$ ;  $a=[1 \ -0.9]$ ;  $Y0=[2]$ ;  $X0=[]$ ;  $\text{xic}=\text{filtic}(b,a,Y0,X0)$ ; %得  $\text{xic}=1.8$

$n=[0:50]$ ;  $x=\text{ones}(1,51)$ ;  $y=\text{filter}(b,a,x,\text{xic})$ ;  $\text{stem}(n,y)$ ;



註：本例中若無初始值，則輸出  $y(n)$  如下：

$b=[1]$ ;  $a=[1 \ -0.9]$ ;  $n=[0:50]$ ;  $x=\text{ones}(1,51)$ ;  $y=\text{filter}(b,a,x)$ ;  $\text{stem}(n,y)$ ;

